



TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

HEIKKI KOSOLA

GNSS-SATELLIITIN ENNUSTETUN KIERTORADAN ESITÄMINEN RATAPARAMETREINÄ

Diplomityö

Tarkastajat: TkT Simo Ali-Löytty ja  
prof. Robert Piché  
Tarkastaja ja aihe hyväksytty  
Luonnontieteiden ja ympäristötekniikan  
tiedekunnan kokouksessa 07.03.2012

# TIIVISTELMÄ

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma

**KOSOLA HEIKKI: GNSS-satelliitin ennustetun kiertoradan esittäminen rata-parametreinä**

Diplomityö, 58 sivua, 6 liitesivua

Toukokuu 2012

Pääaine: Matematiikka

Tarkastajat: TkT Simo Ali-Löytty ja prof. Robert Piché

Avainsanat: satelliitin kiertorata, Keplerin parametrit, rataparametrit

Tässä työssä GNSS-satelliitin (engl. Global Navigation Satellite System) ennustettu kiertorata parametrisoidaan, eli muutetaan parametrimuotoon, jota GPS-järjestelmä (engl. Global Positioning System) käyttää efemerideissään. Kiertoradan ennustuksessa saadaan paikkakoordinaatteja karteesisessa koordinaatistossa tietyillä ajanhetkillä, mihin parametrimuoto sovitetaan. Parametrimuoto ei sovellu täysin ennustettuun kiertorataan, joten parametrit täytyy estimoida siten, että virhettä syntyy mahdollisimman vähän. Tämä on epälineaarinen optimointiongelma, joka ratkaistaan tässä työssä Levenbergin ja Marquardtin ratkaisumenetelmällä.

Työssä keskitytään parametrimuodon esittämiseen ja geometrisen merkityksen tutkimiseen sekä epälineaarisen pienimmän neliösumman optimointiongelman numeeriseen ratkaisemiseen. GPS-järjestelmässä satelliittien lähettämä navigointiviesti vastaanotetaan aina parametrimuodossa ja olisi hyvä tietää miten nämä parametrit saadaan laskettua aikasarjasta satelliitin paikkakoordinaatteja. Tällöin eri järjestelmien efemeridit sekä satelliiteille tehtyt rataennusteet saadaan yhtenevään muotoon ja paikannuslaitteessa tehtävä datan käsittely ja tallennus helpottuu.

Tässä työssä esitettyä mallia testataan GPS- ja GLONASS-satelliiteille (venäj. Globalnaya Navigatsionnaya Sputnikovaya Sistema) tehdyille rataennusteille, sekä precise-efemerideistä saaduille oikeille kiertoradoille. Sovitusvirhe saadaan kahden tunnin mittaiselle sovitukselle alle 10 cm:n suuruiseksi. Neljän tunnin pituisella sovitusvälilläkin päästään vielä alle 40 cm:n virheeseen. Näin ollen satelliitin ennustetun kiertoradan parametrisointi voidaan katsoa onnistuneeksi. Työssä kehitelty algoritmi sopii hyvin satelliiteille, jotka kulkevat GPS:n ja GLONASS:n kaltaisilla kiertoradoilla, joten soveltaminen onnistuu myös muillekin GNSS-satelliiteille.

# ABSTRACT

TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Master's Degree Programme in Science and Engineering

**KOSOLA HEIKKI: Fitting orbit parameters to navigation satellite orbit segments**

Master of Science Thesis, 58 pages, 6 Appendix pages

May 2012

Major: Mathematics

Examiners: D.Sc. Simo Ali-Löytty and Prof. Robert Piché

Keywords: satellite orbit, Kepler parameters, orbit parameters

In this thesis work the predicted orbit of a GNSS (Global Navigation Satellite System) satellite is parameterized, i.e. converted to a parametric format used by GPS (Global Positioning System) satellites in their ephemerides. Orbit prediction produces position coordinates in a Cartesian coordinate system at specific time points, to which the parametric format is fitted. Because this parametric format does not fully fit the predicted orbit, the parameters must be estimated in a way that results in minimal error. This is a non-linear optimization problem which is solved in this work by using the Levenberg-Marquardt algorithm.

This work is focused on presenting the parametric format and analysing its geometric significance as well as numerically solving the non-linear least-squares optimization problem. Navigation messages sent by GPS satellites are always received in a parametric format and it would be good to know how these parameters could be calculated from a time series of satellite position coordinates. Then the ephemerides of different systems and the predicted orbits of satellites would have consistent formats, and data processing and archiving would be facilitated.

The model proposed in this work was tested with orbit predictions for GPS and GLONASS (Globalnaya Navigatsionnaya Sputnikovaya Sistema) satellites and with actual orbits obtained from precise ephemerides. The fitting error for a two-hour fitting was less than 10 cm. Even with a four-hour fitting interval, the fitting error was less than 40 cm. Thus, it can be concluded that parameterization of a predicted satellite orbit was successful. The model presented in this work is well suited to satellites in GPS- and GLONASS-type orbits, so it is also applicable to other GNSS satellites.

# Alkusanat

Tämä työ on tehty henkilökohtaisen paikannuksen algoritmien tutkimusryhmässä, joka toimii Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan laitoksella. Työn on rahoittanut Nokia.

Haluan kiittää työn tarkastajia Simo Ali-Löyttyä ja professori Robert Pichéä mielenkiintoisesta diplomityöaiheesta ja avartavista keskusteluista. Kiitän myös koko tutkimusryhmäämme ja erityisesti Mari Seppästä ideoista ja keskusteluista työn kirjoitusvaiheessa.

Haluan kiittää vanhempiani ja kaikkia läheisiäni, jotka ovat tavalla tai toisella olleet kannustamassa opintojeni aikana ja ennen opintoja. Suurin kiitos kuuluu kuitenkin rakkaalle vaimolleni työn ja koulun ulkopuolelta tulleesta tuesta ja elämäni tasapainottamisesta.

Tampere, 16. toukokuuta 2012

Heikki Kosola  
Kuusikonkatu 4 A 4  
33820 Tampere  
heikki.m.kosola@tut.fi

# Sisältö

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Koordinaatistot</b>	<b>4</b>
2.1	Tässä työssä käytettävät koordinaatistot . . . . .	5
2.1.1	Maahan sidotut koordinaatistot . . . . .	5
2.1.2	Inertiaalikoordinaatistot . . . . .	7
2.2	Koordinaatistomuunnokset . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Satelliitin kiertorata</b>	<b>12</b>
3.1	Liiketyhtälön ratkaiseminen . . . . .	14
3.2	Keplerin parametrit . . . . .	18
3.3	Ratahäiriöt . . . . .	22
3.4	GPS satelliitin rataparametrit . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Optimointiteoriaa</b>	<b>27</b>
4.1	Epälineaarinen pienimmän neliösumman optimointi . . . . .	28
4.1.1	Pienimmän neliösumman ratkaisu . . . . .	32
4.2	Iteratiiviset laskeutumismenetelmät . . . . .	33
4.2.1	Jacobin matriisin laskeminen . . . . .	35
4.2.2	Askelpituuden valinta . . . . .	36
4.3	Levenbergin ja Marquardtin menetelmä . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Satelliitin kiertoradan parametrusointi</b>	<b>41</b>
5.1	Satelliitin kiertoradan ennustaminen . . . . .	41
5.2	Rataparametrien ratkaiseminen . . . . .	43
5.2.1	Alkutila . . . . .	44
5.2.2	Optimointiasetusten optimoiminen . . . . .	46
5.3	Mallin testaus . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Yhteenveto</b>	<b>54</b>
	<b>Viitteet</b>	<b>56</b>
<b>A</b>	<b>Ellipsin yhtälö</b>	<b>59</b>
<b>B</b>	<b>Liikefunktion Lipschitz-jatkuvuuden todistus</b>	<b>62</b>

# Lyhenteet

BE	broadcast-efemeridi (Broadcast Ephemeris)
CTP	konventionaalinen terrestinen napa (Conventional Terrestrial Pole)
CTRS	konventionaalinen terrestinen järjestelmä (Conventional Terrestrial Reference System)
ECEF	Maakeskeinen, Maahan sidottu (Earth Centered, Earth Fixed)
ECI	Maakeskeinen inertiaalikoordinaatisto (Earth Centered Inertial)
EOP	Maan suuntausparametrit (Earth Orientation Parameters)
FK5	Fundamentaaliluettelo 5, tähtien paikkojen perusluettelo (Fundamentalkatalog 5)
GLONASS	Venäjän puolustusministeriön ylläpitämä satelliittipaikannus- järjestelmä (Globalnaya Navigatsionnaya Sputnikovaya Sistema)
GNSS	yhteisnimi kaikille satelliittipaikannusjärjestelmille: GPS, GLONASS, Galileo jne. (Global Navigation Satellite System)
GPS	Yhdysvaltain puolustusministeriön ylläpitämä satelliitti- paikannusjärjestelmä (Global Positioning System)
GTRF	Galileon terrestinen järjestelmä (Galileo Terrestrial Reference Frame)
ICRS	kansainvälinen tähtitieteellinen koordinaattijärjestelmä (International Celestial Reference System)
IERS	kansainvälinen Maan pyörimisen ja koordinaattijärjestelmien palvelu (International Earth Rotation and Reference Systems Service)
IGS	kansainvälinen GNSS-palvelu (International GNSS Service)
IRNSS	intialainen satelliittipaikannusjärjestelmä (Indian Regional Navigational Satellite System)
ITRF	kansainvälisen terrestisen järjestelmän eräs toteutus (International Terrestrial Reference Frame)
ITRS	kansainvälinen terrestinen järjestelmä (International Terrestrial Reference System)

LM	Levenbergin ja Marquardtin menetelmä
Matlab	ohjelmisto numeeriseen laskentaan (Matrix Laboratory)
NGA	Yhdysvaltain puolustusministeriön alainen tiedustelu- organisaatio ja kuvatiedusteluaineistoa käsittelevä virasto (National Geospatial-Intelligence Agency)
PE	precise-efemeridi (Precise Ephemeris)
PRN	näennäissatunnainen numero, jota käytetään satelliittien numeroimiseen (Pseudo Random Number)
PZ-90.02	GLONASS-järjestelmässä käytetty koordinaatistototeutus
WGS-84	maailman geodeettinen järjestelmä (World Geodetic System 1984)

# Merkinnät

$\approx$	approksimaatio eli likiarvo
$\nabla$	differentiaalioperaattori
$\nparallel$	eivät ole yhdensuuntaiset
$\neq$	erisuuruus
$:=$ tai $=:$	määritelmä
$\ \cdot\ $	(2)-normi
$\exists$	olemassaolokvanttori (l. on olemassa)
$\sum_{i=1}^n$	summaus 1:stä $n$ :ään
$\forall$	universaalikvanttori (l. kaikilla)
$\infty$	ääretön
$\vec{0}$	nollavektori
$\mathbf{0}$	nollamatriisi
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	matriiseja
$\mathbf{A}_{ij}$	matriisin $\mathbf{A}$ alkio riviltä $i$ ja sarakkeesta $j$
$\mathbf{A}^T$	matriisin $\mathbf{A}$ transpoosi
$\mathbf{A}^{-1}$	matriisin $\mathbf{A}$ inverssi
$a$	ellipsin isopuoliakseli
$\arg \min_{\vec{x}}$	minimointitehtävän ratkaisu
$b$	ellipsin pienipuoliakseli
$(\vec{b}, \vec{e})$	vektoreiden $\vec{b}$ ja $\vec{e}$ välinen kulma
$C_{ic}, C_{is}$	inklinaatiokulman harmonisen korjauksen amplitudit
$C_{rc}, C_{rs}$	säteen harmonisen korjauksen amplitudit
$C_{uc}, C_{us}$	leveysasteen harmonisen korjauksen amplitudit
$\cos(\vec{x}, \vec{y})$	vektoreiden $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ välisen kulman kosini
$df(\vec{r})/d\vec{r}$	funktion $f(\vec{r})$ derivaatta $\vec{r}$ :n suhteen
$\partial f(\vec{r})/\partial x$	funktion $f(\vec{r})$ osittaisderivaatta $x$ :n suhteen
$\Delta n$	keskikulmanopeuden korjaustermi
$\Delta t$	aika-askel eli ajanjakson pituus
$\Delta \vec{x}_k$	hakusuuntavektori
$E$	eksentrinen anomalia



$e$	ellipsin eksentrisyys
$\vec{e}$	kiertoradan eksentrisyysvektori
$\vec{e}_i$	standardi kannan $i$ :s yksikkövektori
$\vec{\epsilon}$	stokastinen häiriötermi
$F(\vec{x})$	optimointiongelman kohdefunktio eli sakkofunktio
$\vec{f}(\vec{x})$	optimointiongelman residuaalifunktio
$\nabla f(\vec{r})$	funktion $f(\vec{r})$ gradientti, eli derivaatan transpoosi
$f'(\vec{r})$	funktion $f(\vec{r})$ derivaatta
$G$	yleinen gravitaatiovakio
$\mathbf{H}$	Hessen matriisi
$\mathbf{I}$	identiteettimatriisi
$i$	ratatason inkliinaatiokulma, tilanteesta riippuen voi olla myös ylä-, ala- tai summausindeksi
$i_0$	inkliinaatiokulma referenssiajanhetkellä $t_{0e}$
$\dot{i}$	inkliinaatiokulman aikaderivaatta
$\mathbf{J}$	Jacobin matriisi
$\vec{k}$	satelliitin pyörimismäärä massayksikköä kohden
$\vec{L}$	satelliitin pyörimismäärä
$\lambda^k$	hakusakeleen kerroin
$M$	keskianomalia
$M_E$	Maan massa
$M_0$	keskianomalia referenssiajanhetkellä $t_{0e}$
$\min_{\vec{x}}$	vektorin $\vec{x}$ suhteen suoritettava minimointitehtävä
$m_{\text{sat}}$	satelliitin massa
$\mu$	gravitaatiokerroin
$\mu_k$	LM-menetelmän vaimennuskerroin askeleella $k$
$\mathcal{N}(\mathbf{A})$	matriisin $\mathbf{A}$ virittämä nolla-avaruus
$n$	keskianomalian aikaderivaatta, eli keskimääräinen kulmanopeus, tilanteesta riippuen myös avaruuden dimensio
$\nu$	luonnollinen anomalia
$\vec{P}(t, \vec{x})$	liiketyhtälön häiriökiihtyvyys
$\text{proj}_{\vec{x}}(\vec{y})$	vektorin $\vec{y}$ vektoriprojektio vektorille $\vec{x}$
$\mathbb{R}$	reaalilukujen joukko
$\mathbb{R}^+$	positiivisten reaalilukujen joukko
$\mathbb{R}^n$	$n$ -ulotteisten reaalisten pystyvektorien joukko
$\mathbb{R}^{m \times n}$	$m$ riviä korkeiden ja $n$ saraketta leveiden reaalisten matriisien joukko
$\mathcal{R}(\mathbf{A})$	matriisin $\mathbf{A}$ virittämä kuva-avaruus

$\mathcal{R}(\mathbf{A})^\perp$	kuva-avaruuden $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ ortogonaali komplementti
$\mathbf{R}_A^B$	muunnosmatriisi koordinaatistosta A koordinaatistoon B
$\mathbf{R}_i(\theta_i)$	muunnosmatriisi, joka vastaa kiertoa koordinaattiakselin $i$ ympäri kulman $\theta_i$ verran
$R_k$	LM-menetelmän muutossuhde
$\vec{\mathbf{r}}$	paikkavektori
$\text{rank}(\mathbf{A})$	matriisin $\mathbf{A}$ aste
$r_{\max}$	paikkavektorin maksimipituus
$r_{\min}$	paikkavektorin minimipituus
$t_{0e}$	efemeridin referenssiajanhetki
$\phi_k$	leveyspiiri
$\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{r}}$	vektoreita
$\bar{x}$	keskiarvo
$\dot{\vec{\mathbf{x}}}$	vektorin $\vec{\mathbf{x}}$ aikaderivaatta
$\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{y}}$	vektorien $\vec{\mathbf{x}}$ ja $\vec{\mathbf{y}}$ välinen ristitulo
$x_i$	vektorin $\vec{\mathbf{x}}$ $i$ :s komponentti
$\omega$	perigeumin argumentti
$\Omega$	nousukohdan pituusaste
$\Omega_0$	nousukohdan pituusaste GPS-viikon alussa
$\Omega_e$	maapallon pyörimisnopeus
$\dot{\Omega}$	nousukohdan pituusasteen aikaderivaatta

# Luku 1

## Johdanto

Satelliittipaikannuksessa on ideana määrittää paikannuslaitteen paikka satelliittien lähettämän informaation avulla. Satelliitti lähettää käyttäjälle broadcast-efemeridiksi kutsutun viestin, joka sisältää muun muassa satelliitin paikan ja kelloajan efemeridin lähetyshetkellä. Paikannuslaite vastaanottaa viestin hiukan lähettämisaikahetken jälkeen, ja voi näin laskea viestin kulkemiseen kuluneen ajan. Koska viesti kulkee valonnopeudella satelliitista käyttäjälle, voidaan etäisyys määrittää valonnopeuden ja kuluneen ajan tulona.

Paikannuslaitteen sijainnin määrittämiseen tarvitaan kolme parametria eli koordinaattia. Ratkaistavana on siis kolme tuntematonta, jolloin tarvitaan myös kolme yhtälöä. Nämä saadaan käyttämällä tietoa paikannuslaitteen etäisyydestä kolmeen eri satelliittiin sekä satelliittien sijainnista. Paikannuslaitteiden kellot ovat käytännössä liian epätarkkoja, kun puhutaan valon kulkemasta matkasta tietyssä ajassa. Siispä myös paikannuslaitteen kellon virhe on asetettava ratkaistavaksi tuntemattomaksi. Näin tarvitaan neljännekin satelliitin tiedot sijainnin määrittämiseksi.

GNSS (engl. Global Navigation Satellite System) on yleisnimitys kaikille satelliittipaikannusjärjestelmille. Käytössä olevia satelliittipaikannusjärjestelmiä ovat Yhdysvaltalainen GPS (engl. Global Positioning System) sekä Venäläinen GLONASS (venäj. Globalnaya Navigatsionnaya Sputnikovaya Sistema). Muita satelliittipaikannusjärjestelmiä ovat muun muassa Eurooppalainen Galileo, Kiinalainen Compass ja Intialainen IRNSS (engl. Indian Regional Navigational Satellite System). Näistä Compass ja IRNSS ovat kuitenkin vain paikallisesti kattavia järjestelmiä. Lisäksi Galileo on vielä enemmän tai vähemmän suunnittelu- ja kokeiluvaiheessa. Tässä työssä keskitytään lähinnä GPS:ään ja GLONASS:iin, koska näistä on saatavilla oikeaa mittausaineistoa. Tällöin laskenta on mielekkäämpää, kun ei tarvitse käyttää simuloitua dataa. [30, s. 7-8, 16-25]

GPS-järjestelmä koostuu kolmesta osasta: kontrolliverkosta, satelliiteista ja käyttäjistä. Kontrolliverkkoon kuuluu Colorado Springssissä sijaitseva pääasema, sekä useita muita tarkkailuasemia. Kontrolliverkossa satelliitteja tarkkaillaan, ennustetaan satelliittien efemeridit ja tarvittaessa ohjaillaan. Satelliitit lähettävät efemeridit edelleen paikannusjärjestelmän käyttäjälle. Efemeridit ovat voimassa kerrallaan 2 tunnin ajan, jonka jälkeen kontrolliverkko lähettää satelliitille jälleen uudet efemeridit. Myös GLONASS-järjestelmässä rakenne on samanlainen ja eroja on lähinnä yksityiskohdissa, kuten efemeridin sisällössä ja kontrolliverkon sijainnissa. [23, s. 33-36]

GPS-satelliittien lähettämät efemeridit sisältävät 16 rataparametria, jotka määrittävät tietyn ennalta määrätyn patkan satelliitin kiertorataa. GPS-vastaanottimet sisältävät algoritmit, joiden avulla näistä parametreista voidaan laskea satelliitin paikkakoordinaatit halutulla ajanhetkellä. Toisin sanoen koordinaattien laskemisessa ei tarvita tietoa siitä, kuinka parametrit muodostetaan, vaan se jätetään kontrolliasemien huolehdittavaksi. Tästä aiheesta ei ole tietoa tarjolla, vaan GPS-järjestelmästä kertovassa kirjallisuudessa keskitytään tarkastelemaan ongelmaa vain käyttäjän näkökulmasta. Jossain tilanteissa tai sovelluksissa olisi kuitenkin hyödyksi, mikäli parametrit kyettäisiin muodostamaan itse. [15, s. 39-43]

GPS satelliitit lähettävät efemeridinsä noin 30 sekunnin välein ja yhden efemeridin vastaanottamiseen kuluu noin 12 sekuntia aikaa. [23, s. 128] Vaikeissa olosuhteissa, kuten kaupunkioiloissa kerrostalojen varjoissa, tämä aiheuttaa monia teknisiä ongelmia paikannukseen. Esimerkiksi paikannuslaitteen ollessa liikkeessä ensimmäisen kokonaisen efemeridin saaminen voi kestää pitkänkin ajan. Eräs vaihtoehto olisi hankkia satelliitin sijainti etukäteen muilla keinoilla. Satelliitin kiertoradalle voidaan esimerkiksi tehdä omat rataennusteet ja korvata niillä taivaalta tuleva efemeridi. Tällöin paikannuslaite tarvitsee satelliitilta pelkästään kelloajan, mikä saadaan noin kuuden sekunnin välein. [23, s. 128] Tällöin paikannuslaite olisi käytettävissä huomattavasti nopeammin paikannuksen aloittamisen jälkeen.

Satelliitin kiertoradan ennustaminen voidaan tehdä esimerkiksi voimamallin avulla. Satelliittin liikkeeseen vaikuttavat vuorovaikutukset ja näiden aiheuttamat voimat voidaan määrittää suhteellisen tarkasti. Voimien avulla voidaan selvittää satelliitin kiertorata halutusta alkupaikasta eteenpäin. Tällaista ennustamista on tehty esimerkiksi lähteissä [33] ja [35]. Ennustaminen voidaan tehdä suoraan paikannuslaitteessa, jolloin saadut kiertoradat täytyisi pystyä tallentamaan sopivassa kompaktissa muodossa. Satelliitti kiertää maapallon yhden vuorokauden aikana kaksi kertaa, jolloin kaikkien satelliittien kiertoratojen esitys paikkakoordinaateissa esimerkiksi viikon ajalta olisi turhan raskasta. Hyvä esitystapa olisi GPS-järjestelmän käyttämät rataparametrit — niitähän paikannuslaitteet osaavat valmiiksi käsitellä.

Paikannuslaitteessa tehtävässä riittävän tarkassa ennustamisessa ongelmana on usein melko raskas laskenta. Tämä ongelma voitaisiin ratkaista esimerkiksi osit-

taisella verkkoyhteydellä. Kiertoratojen ennustaminen voidaan tehdä serveripuolella voimamalleja käyttäen ainakin viikoksi eteenpäin riittävän tarkasti. [35] Tällöin on mietittävä, missä muodossa paikkakoordinaateissa tehty ennustus kannattaa siirtää paikannuslaitteeseen. Jälleen kerran rataparametrit olisivat sopiva kompakti esitystapa kiertoradalle.

Muissa GNSS-järjestelmissä efemeridin esitysmuoto on erilainen kuin GPS-järjestelmän rataparametrimuoto. Esimerkiksi GLONASS-satelliitit lähettävät efemeridin koordinaattimuodossa, jolloin niitä joudutaan päivittämään jatkuvasti. [8] Nykyiset GPS-järjestelmää käyttävät paikannuslaitteet laskevat kuitenkin paikatiedot rataparametreista, joita ne ovat tottuneet satelliiteilta vastaanottamaan. Mielenkiintoista olisikin tietää, kuinka muiden järjestelmien, kuten GLONASS-järjestelmän, efemeridit muutetaan rataparametrimuotoon.

Tässä työssä on tavoitteena esittää ennustettu satelliitin kiertorata rataparametrimuodossa, jota GPS-järjestelmä käyttää efemerideissään. Rataparametrimuoto ei sovellu täysin ennustettuun kiertorataan, parametrit täytyy estimoida siten, että virhettä syntyy mahdollisimman vähän. Tämä on optimoimisongelma, jossa minimoidaan rataparametrisoinnissa syntyvää virhettä. Laskennassa käytetään optimointialgoritmia, joka laskee painotetun pienimmän neliösumman ratkaisun eli estimaatin.

Työn rakenne on seuraavanlainen: Toisessa luvussa tarkastellaan hiukan koordinaatistoja sekä siirtymistä eri koordinaatistojen välillä. Kolmannessa luvussa kerrotaan satelliittien kiertoradoista yleisesti sekä GPS-järjestelmän rataparametreista, jotka generoivat satelliitin radan. Siinä luodaan malli, jolla kiertorata voidaan laskea rataparametreista.

Neljännessä luvussa tarkastellaan matemaattista optimointia, sekä tutustutaan työssä käytettyyn epälineaarisen optimoinnin menetelmään: Levenbergin ja Marquardtin menetelmään. Siinä saadaan käyttöön työkalut tutkimusongelman ratkaisemiseen. Viidennessä luvussa testataan mallia sekä esitellään työssä saatuja tuloksia ja kuudennessa eli viimeisessä on yhteenveto ja johtopäätökset.

# Luku 2

## Koordinaatistot

Satelliitin radasta, ja yleensäkin paikasta ja sijainnista, puhuttaessa ei voida välttyä erilaisten koordinaatistojen käsittelyltä. Paikan tarkkaan määrittämiseen avaruudessa tarvitaan kolme parametria. Nämä parametrit kertovat täsmällisesti sijainnin, havaitsijan tai jonkin muun kiintopisteen suhteen.

*Koordinaatistojärjestelmä* on joukko suureita ja määritelmiä, jotka määrittävät *koordinaatiston*. Koordinaatisto on siis yksi koordinaatistojärjestelmän toteutus, joka saadaan kiinnittämällä järjestelmän suuret tiettyihin pisteisiin. Näitä kiintopisteitä voivat olla esimerkiksi origo, akselien suunnat ja aika. Koordinaatisto on usein suorakulmainen akselisto, jonka avulla jonkin pisteen sijainti voidaan täsmällisesti määrittää koordinaatiston origoon nähden. *Koordinaatit* ovat parametreja, joilla tämä sijainti esitetään kyseisessä koordinaatistossa.

Sijainti maapallolla esitetään usein geodeettisissä koordinaatistoissa, joka on määriteltä *vertailuellipsoidin* avulla. Vertailuellipsoidi on Maan epäideaalista pintaa kuvaava matemaattinen pinta, jonka koko ja muoto määritellään yleensä isopuoliakselin ja litistyssuhteen avulla. Geodeettiset koordinaatit ovat vertailuellipsoidiin kiinnitetyn paikan sijainti, eli leveys- ja pituuskulma, sekä etäisyys ellipsoidin pinnasta. Geodeettinen koordinaatisto ei ole suorakulmainen eikä maakeskinen koordinaatisto.

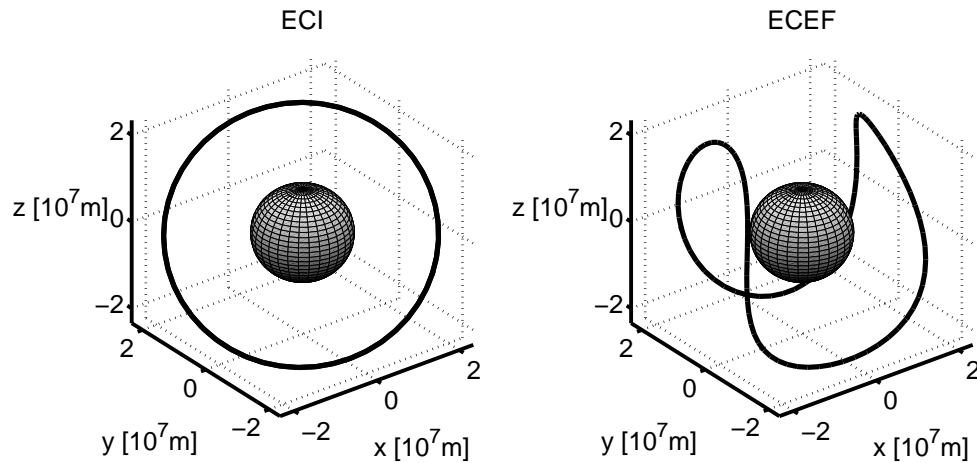
Tässä työssä käytetyt koordinaatistot voidaan jaotella karkeasti kahteen osaan: inertiaalikoordinaatistot ja Maahan kiinnitetyt koordinaatistot. Inertiaalikoordinaatistot ovat koordinaatistoja, jotka eivät pyöri eivätkä ole kiihtyvässä liikkeessä. Maahan kiinnitetyt koordinaatistot liikkuvat maapallon mukana, eli ne pyörivät maapallon mukana Auringon sekä itsensä ympäri.

Maahan kiinnitetyissä koordinaatistoissa on helpointa kuvata maapallon gravitaatiokenttää, mutta esimerkiksi fysiikasta tutut Newtonin liikelait eivät päde tällaisessa akselinsa ympäri pyörivässä ei-inertiaalikoordinaatistoissa. Toisaalta taivaan-

kappaleiden paikat on helpointa ilmoittaa koordinaatistoissa, joita ei ole sidottu maapalloon. Lisäksi lopullinen paikka halutaan usein geodeettisessa koordinaatistossa. Helpointa ja laskennallisesti kevyintä on laskea eri asioihin liittyvät ilmiöt sopivissa koordinaatistoissa ja muuttaa tämän jälkeen tulokset haluttuun koordinaatistoon sopivalla koordinaatistomuunnoksella.

## 2.1 Tässä työssä käytettävät koordinaatistot

GNSS satelliitit lähettävät sijaintitietonsa Maahan sidotuissa koordinaatistoissa, joista käytetään nimitystä ECEF (engl. Earth Centered Earth Fixed). Rataennusteiden laskeminen suoritetaan sen sijaan inertiaalikoordinaatistossa. Tässä työssä inertiaalikoordinaatistona on ECI (engl. Earth Centered Inertial), missä origo on asetettu Maan massakeskipisteeseen. Inertiaalikoordinaatistoissa satelliitin kiertoradat muuttuvat varsin yksinkertaisiksi ellipsimäisiksi radoiksi. Kuvassa 2.1 on esitetty tyypillinen kiertorata ECEF- ja ECI-koordinaatistoissa.



Kuva 2.1: Tyypillinen satelliitin kiertorata esitettynä ECI ja ECEF koordinaatistoissa. ECEF koordinaatistossa melko vaikean näköinen kiertorata on ECI koordinaatistossa lähes ympyrän muotoinen ellipsi.

### 2.1.1 Maahan sidotut koordinaatistot

Maahan sidotuissa karteesisissa koordinaatistoissa järkevintä on sijoittaa origo Maan massakeskipisteeseen. Koordinaattiakselien suunnat pyritään määrittämään siten, että z-akseli on mahdollisimman lähellä Maan pyörimisakselia, ja x-akseli osoittaa Greenwichin meridiaaniin, eli nollameridiaaniin. Viimeinen akseli, y-akseli, täydentää koordinaatiston suorakulmaiseksi oikeakätiseksi koordinaatistiksi.

Maapallo ei ole kuitenkaan täysin jäykkä kappale, vaan se koostuu useasta liikuvasta mannerlaatasta. Siten maapallon pyörimisakseli sekä nollameridiaani eivät pysy paikallaan maapallon pintaan nähden, vaan vaeltelevat hiljalleen muutaman kymmenen neliömetrin alueella. Pyörimisakselin, eli navan liikettä sanotaan *napa-variaatioksi* ja se koostuu kahdesta jaksollisesta (jaksot: 365.25 vrk ja 435 vrk) sekä yhdestä pitkäaikaisesta tekijästä. Konventionaalinen terrestinen napa CTP (engl. Conventional Terrestrial Pole) on laskettu pyörimisakselin keskimääräisenä sijaintina vuosien 1900 ja 1905 välillä. [23, s. 93]

Lisäksi maapallon pyörimisakseli liikkuu Auringon, Kuun ja muiden planeettojen vetovoiman vaikutuksesta jaksollisesti kahdella eri jaksonajalla. Näitä ilmiöitä kutsutaan *prekressioksi* ja *nutaatioksi*, ja niitä pystytään kohtalaisen hyvin ennustamaan useiden kuukausien ajaksi eteenpäin. [32, s. 99-115]

Tässä työssä käytetyt Maahan sidotut koordinaatistot pohjautuvat *konventionaaliseen terrestiseen koordinaatistojärjestelmään*, CTRS:ään (engl. Conventional Terrestrial Reference Systems). CTRS:n mukaiset koordinaatistot määritellään seuraavalla tavalla: [23, s. 94]

*CTRS on suorakulmainen koordinaatisto, jonka*

- *origo on Maan massakeskipisteessä*
- *z-akseli osoittaa konventionaaliseen terrestiseen napaan, CTP:hen*
- *x-akseli osoittaa keskimääräiseen nollameridiaaniin*
- *y-akseli täydentää koordinaatiston oikeakätiseksi.*

Tässä määritelmässä keskimääräinen nollameridiaani tarkoittaa useasta tukiasemasta laskettujen nollameridiaanien keskiarvoa. Koska CTRS:n mukaisissa koordinaatistoissa parametrit muuttuvat ajan suhteen, täytyy koordinaatisto lisäksi sitoa johonkin tiettyyn ajanhetkeen, epookkiin.

Kansainvälinen terrestinen järjestelmä ITRS (engl. International Terrestrial Reference System) on standardijärjestön IERS (engl. International Earth Rotation and Reference Systems Service) ylläpitämä CTRS:n mukainen globaali koordinaatistojärjestelmä. Tässä työssä käytetään IERS:n koordinaatistoa ITRF (engl. International Terrestrial Reference Frame), jonka toteutuksessa käytetään useita maapallon eri paikoissa sijaitsevia havaintoasemia. Eri satelliittipaikannusjärjestelmien satelliitit lähettävät ratatietonsa CTRS:n mukaisissa omien havaintoasemiensa perusteella toteutetuissa koordinaatistoissa. Nämä koordinaatistot ovat kuitenkin hyvin lähellä ITRF:ää.



GPS-satelliitit lähettävät sijaintinsa WGS-84 (engl. World Geodetic System 84) koordinaattijärjestelmässä. WGS-84:n ja ITRF:n välinen ero on muutaman senttimetrin luokkaa, joka riittää tässä työssä tarkkuudeksi. Galileon käyttämä koordinaatisto GTRF (engl. Galileo Terrestrial Reference Frame) perustuu Galileon maa-asemiin, ja on myös muutaman senttimetrin tarkkuudella yhtenevä ITRF:n kanssa. GLONASS-satelliittien lähettämät ratatiedot ovat PZ-90.02 -koordinaatistossa, joka eroaa desimetrin suuruusluokkaa ITRF:stä. [9] Tämä poikkeama on jo sen verran suuri, että PZ-90.02 -koordinaatistossa tulevat ratatiedot täytyy muuttaa ITRF -koordinaatistoon.

## 2.1.2 Inertiaalikoordinaatistot

Inertiaalikoordinaatistot ovat koordinaatistoja, jotka eivät ole kiihtyvässä liikkeessä, eli eivät esimerkiksi pyöri akselinsa ympäri maapallon mukana. Eräs tällainen on standardijärjestön IERS ylläpitämä koordinaatistojärjestelmä ICRS (engl. International Celestial Reference System). ICRS:n koordinaatistossa origo on edelleen sijoitettu maapallon keskipisteeseen. Koordinaatiston akselit eivät kuitenkaan pyöri maapallon ympäri, vaan ne on sidottu suhteellisen liikkumattomina pysyviin kohteisiin, kuten tähtiin.

ICRS korvasi vuonna 1998 FK5-järjestelmän (saks. Fundamentalkatalog 5), ja se haluttiin silloin tehdä yhteneväksi aikaisemman järjestelmän kanssa. FK5-järjestelmässä z-akseli on sidottu maapallon ekvaattoritasoon ja x-akseli kevätpäiväntasauspisteeseen, eli ekvaattoritason ja ratatason leikkauspisteeseen. Ekvaattoritason liikkuminen prekression ja nutaation vuoksi aiheuttaa sen, että akselien suunnat täytyy sitoa johonkin tiettyyn ajanhetkeen eli epookkiin.

*ICRS on suorakulmainen koordinaatisto, jonka*

- *origo on Maan massakeskipisteessä*
- *z-akseli on maapallon ekvaattoritason normaalin suuntainen epookilla J2000.0*
- *x-akseli osoittaa kevätpäiväntasauspisteeseen epookilla J2000.0*
- *y-akseli täydentää koordinaatiston oikeakätiseksi.*

ICRS:n määritelmässä epookki J2000.0 tarkoittaa kalenterissamme ajanhetkeä klo. 12, 1. tammikuuta 2000. Tarkalleen ottaen tällainen koordinaatisto ei ole inertiaalikoordinaatisto, sillä Maan keskipiste, ja siten myös koordinaatiston origo, ovat kiihtyvässä liikkeessä kiertäessään Aurinkoa. Kuitenkin se on tämän työn puitteissa riittävän hyvä approksimaatio inertiaalikoordinaatistolle. [28, s. 21-22]

## 2.2 Koordinaatistomuunnokset

Tarkastellaan seuraavaksi siirtymistä koordinaatistosta toiseen, eli koordinaatistomuunnosta. Tässä työssä täytyy koordinaatistomuunnoksia tehdä lähinnä ECI:n ja ECEF:n välillä. Nämä koordinaatistot ovat suorakulmaisia koordinaatistoja, joiden origot sijaitsevat samassa pisteessä, ja joiden skaalaus on sama. Tämä tarkoittaa käytännössä sitä, että koordinaatistomuunnos voidaan tehdä pyörittämällä koordinaatistoa sopivasti.

Tarkastellaan kahta tällaista koordinaatistoa  $A$  ja  $B$  ja esitellään muunnos koordinaatistosta  $A$  koordinaatistoon  $B$ . Merkitään jonkin paikan  $\vec{r}$  koordinaatteja kyseisessä koordinaatistossa kreikkalaisilla kirjaimilla seuraavasti:  $\vec{r}_A = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)^T$  ja  $\vec{r}_B = (\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3)^T$ . Tällöin paikka voidaan esittää kantavektoreiden ja koordinaattien avulla

$$\mathbf{X}_A \vec{r}_A = \vec{r} = \mathbf{X}_B \vec{r}_B,$$

missä matriisiin  $\mathbf{X}_i$  sarakkeet ovat kyseisen koordinaatiston kantavektorit. Kantavektoreista muodostettu matriisi on ei-singulaarinen ja näin myös kääntyvä, joten muunnos koordinaatistojen välillä saadaan muotoon

$$\vec{r}_B = (\mathbf{X}_B)^{-1} \mathbf{X}_A \vec{r}_A. \quad (2.1)$$

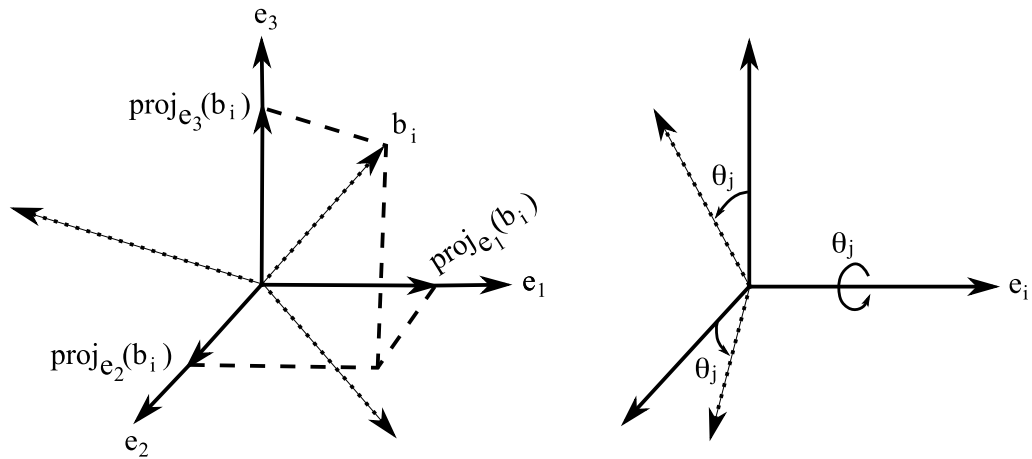
Valitaan lähtökoordinaatisto  $A$  tarkastelukoordinaatistoksi, eli asetetaan sen kanta luonnolliseksi. Tällöin kantavektorimatriisi on  $\mathbf{X}_A = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3) = \mathbf{I}$ . Lisäksi koska molempien koordinaatistojen kantavektorit ovat ortonormaaleja, saadaan kantavektorimatriisiin käänteismatriisi transponoimalla kyseistä matriisia. Näin saadaan yhtälö (2.1) muotoon

$$\vec{r}_B = (\mathbf{X}_B)^T \vec{r}_A.$$

Merkitään tätä matriisia  $(\mathbf{X}_B)^T = \mathbf{R}_A^B$ . Tätä kutsutaan muunnosmatriisiksi koordinaatistosta  $A$  koordinaatistoon  $B$ . Muunnosmatriisi toiseen suuntaan saadaan siis transponoimalla, eli  $\vec{r}_A = \mathbf{R}_B^A \vec{r}_B = (\mathbf{R}_A^B)^T \vec{r}_B$ .

Merkitään koordinaatiston  $B$  kantavektoreita koordinaatistossa  $A$  kirjaimilla  $\vec{b}_i$ . Koska molemmat koordinaatistot ovat suorakulmaisia, ovat vektorit ortogonaalisia yksikkövektoreita. Alkuperäinen paikka voidaan edelleen esittää koordinaatistossa  $A$  näiden kantavektorien avulla

$$\vec{r}_A = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 \beta_i \vec{b}_i. \quad (2.2)$$



Kuva 2.2: Koordinaatistomuunnos, missä origo ja skaalaus pysyvät samana. Vasemman puoleisessa kuvassa on uuden koordinaatiston kantavektorien esittäminen projektioina alkuperäisen koordinaatiston kantavektoreille. Oikean puoleisessa kuvassa koordinaatistoa pyöritetään yhden akselin ympäri.

Nyt yksikkövektorit  $\vec{b}_i$  voidaan kirjoittaa luonnollisten kantavektorien suuntaisten komponenttiensa avulla. Yksikkövektorin  $\vec{b}_i$  vektoriprojektio yksikkövektorille  $\vec{e}_j$  on

$$\text{proj}_{\vec{e}_j}(\vec{b}_i) = (\vec{b}_i^T \vec{e}_j) \vec{e}_j = \cos(\vec{b}_i, \vec{e}_j) \vec{e}_j,$$

missä merkintä  $(\vec{b}_i, \vec{e}_j)$  tarkoittaa vektoreiden  $\vec{b}_i$  ja  $\vec{e}_j$  välistä kulmaa. Tällöin saadaan

$$\vec{b}_i = \sum_{j=1}^3 \cos(\vec{b}_i, \vec{e}_j) \vec{e}_j, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (2.2) saadaan

$$\vec{r}_A = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 \left( \beta_i \sum_{j=1}^3 \cos(\vec{b}_i, \vec{e}_j) \vec{e}_j \right).$$

Yhtälössä olevat summat voidaan kirjoittaa myös matriisimuodossa, jolloin saadaan

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} \cos(\vec{b}_1, \vec{e}_1) & \cos(\vec{b}_2, \vec{e}_1) & \cos(\vec{b}_3, \vec{e}_1) \\ \cos(\vec{b}_1, \vec{e}_2) & \cos(\vec{b}_2, \vec{e}_2) & \cos(\vec{b}_3, \vec{e}_2) \\ \cos(\vec{b}_1, \vec{e}_3) & \cos(\vec{b}_2, \vec{e}_3) & \cos(\vec{b}_3, \vec{e}_3) \end{pmatrix} \vec{r}_B.$$

Näin saatiin määritettyä muunnosmatriisi  $\mathbf{R}_B^A$ . Transponoimalla saadaan alunperin haettu matriisi

$$\mathbf{R}_A^B = (\mathbf{R}_B^A)^T = \begin{pmatrix} \cos(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{e}}_1) & \cos(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2) & \cos(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{e}}_3) \\ \cos(\vec{\mathbf{b}}_2, \vec{\mathbf{e}}_1) & \cos(\vec{\mathbf{b}}_2, \vec{\mathbf{e}}_2) & \cos(\vec{\mathbf{b}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3) \\ \cos(\vec{\mathbf{b}}_3, \vec{\mathbf{e}}_1) & \cos(\vec{\mathbf{b}}_3, \vec{\mathbf{e}}_2) & \cos(\vec{\mathbf{b}}_3, \vec{\mathbf{e}}_3) \end{pmatrix},$$

jota kutsutaan usein myös *suuntakosinimatriisiksi*. [1, s. 15] Suuntakosinimatriisissa jokainen alkio riippuu eri kulmasta, eli matriisi on yhdeksän eri kulman funktio.

Koska molemmat koordinaatistot ovat suorakulmaisia, voidaan kaikki nämä kulmat esittää kolmen riippumattoman kulman avulla. [2, s. 199] Riippumattomat kulmat voidaan esimerkiksi valita siten, että ne kuvaavat kolmea peräkkäistä kiertoa koordinaatiston  $A$  kaikkien akselien ympäri. Merkitään näitä kulmia  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  ja  $\theta_3$ , missä numerointi on akselien numeroinnin kanssa yhtenevä. (kuva 2.2) Tällöin kiertoja vastaavat matriisit ovat

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1(\theta_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ 0 & -\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix}, & \mathbf{R}_2(\theta_2) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & 0 & -\sin(\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta_2) & 0 & \cos(\theta_2) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{R}_3(\theta_3) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) & 0 \\ -\sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Tässä on hyvä huomata, että koordinaatistomuunnoksessa kulmat riippuvat kiertojärjestyksestä. Toisin sanoen, kun kiertojärjestystä muutetaan muuttuvat myös kiertokulmat. Merkataan siis kolmea kiertoakselista riippumatonta kiertokulmaa kirjaimilla  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$ . Tällöin muunnosmatriisi voidaan esittää muodossa

$$\mathbf{R}_k(\gamma)\mathbf{R}_j(\beta)\mathbf{R}_i(\alpha), \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\}, i \neq j, \quad (2.4)$$

jolloin kulmia  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  sanotaan *Eulerin kulmiksi*. [4, s. 224]

Eulerin kulmien avulla saatua esitystä (2.4) sanotaan symmetriseksi, mikäli  $i = k$ . Vastaavasti esitystä sanotaan ei-symmetriseksi, kun kiertoakseleina käytetään kaikkia kolmea koordinaattiakselia. Tässä työssä käytetään symmetrisiä *klassisia Eulerin kulmia*

$$\mathbf{R}_3(\gamma)\mathbf{R}_1(\beta)\mathbf{R}_3(\alpha). \quad (2.5)$$

Sijoitetaan tähän kiertoja vastaavat matriisit (2.3), jolloin muunnosmatriisiksi saadaan

$$\mathbf{R}_3(\gamma)\mathbf{R}_1(\beta)\mathbf{R}_3(\alpha) = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha)\cos(\beta)\sin(\gamma) + \cos(\alpha)\cos(\gamma) \\ -\sin(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma) - \cos(\alpha)\sin(\gamma) \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha)\cos(\beta)\sin(\gamma) + \sin(\alpha)\cos(\gamma) & \sin(\beta)\sin(\gamma) \\ \cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma) - \sin(\alpha)\sin(\gamma) & \sin(\beta)\cos(\gamma) \\ -\cos(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}.$$

Koska sini on pariton ja kosini parillinen funktio, kiertomatriiseille (2.3) saadaan ominaisuus  $\mathbf{R}_i(-\theta_i) = \mathbf{R}_i(\theta_i)^T$ . Koordinaatistomuunnos käänteiseen suuntaan saatiin transponoimalla muunnosmatriisia, joten transponoidaan Eulerin kulmilla saatu esitys (2.5). Tällöin saadaan koordinaatistomuunnos Eulerin kulmien avulla

$$(\mathbf{R}_3(\gamma)\mathbf{R}_1(\beta)\mathbf{R}_3(\alpha))^T = \mathbf{R}_3(\alpha)^T\mathbf{R}_1(\beta)^T\mathbf{R}_3(\gamma)^T = \mathbf{R}_3(-\alpha)\mathbf{R}_1(-\beta)\mathbf{R}_3(-\gamma). \quad (2.6)$$

# Luku 3

## Satelliitin kiertorata

Satelliitin sanotaan joskus olevan maapallomme tekokuu. Satelliittien kiertoradat todella muistuttavat hyvin pitkälti planeettojen ja muiden taivaankappaleiden ratoja. Ellipsimäinen kiertorata on klassisen kahden kappaleen ongelman seurausta, ja sitä on tutkittu siitä lähtien kun planeettojen liikettä on kyetty seuraamaan. Johannes Kepler (1571 - 1630) muotoili havaintojensa perusteella lait, jotka kuvaavat planeettojen liikettä.

Keplerin ensimmäinen laki kuvaa planeetan kiertorataa: Planeetan kiertorata on ellipsi, jonka polttopisteessä on tähti. Toinen laki kuvaa planeetan nopeutta: Planeetan ja tähden välillä oleva jana jättää jälkeensä ajassa  $t$  aina saman-suuruisen pinta-alan  $A$  planeetan sijainnista riippumatta. Kolmas Keplerin laki kuvaa eri planeettojen kiertoratojen keskinäisiä suhteita: Kahden planeetan kiertoaikojen neliöiden suhde on yhtäsuuri kuin planeettojen keskimääräisien etäisyyksien kuutioiden suhde. [21, s. 107-109; 39, s. 370-373]

Nämä samat lait kuvaavat ansiokkaasti myös muidenkin taivaankappaleiden liikettä, kuten myös maapallon kiertolaisten, kuun satelliittien yms. liikettä. Myöhemmin Isaac Newton (1642 - 1727) muotoili painovoimalakinsa, joka on perustana vielä nykyäänkin kahden kappaleen välisiä vuorovaikutuksia kuvattaessa.

Olkoon  $\vec{r} = \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^3$  satelliitin paikkavektori jossakin maapalloseskeisessä inertiaalikoordinaatistossa ajanhetkellä  $t$ . Tällöin satelliitin gravitaatiokiihtyvyys saadaan Newtonin mukaan

$$\vec{F} = m_{\text{sat}} \vec{a} = -G \frac{M_E m_{\text{sat}}}{\|\vec{r}\|^2} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|},$$

missä  $G$  on yleinen gravitaatiovakio,  $M_E$  maapallon massa ja  $m_{\text{sat}}$  satelliitin massa. [39, s. 358] Tästä saadaan edelleen satelliitin paikan toinen aikaderivaatta, eli kiihtyvyys

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G \frac{M_E}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r} = -\frac{\mu}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r}, \quad (3.1)$$

missä maapallon gravitaatiokerroin  $\mu$  on yleisen gravitaatiovakioiden ja maapallon massan tulo:  $\mu = 3.986005 \cdot 10^8 \text{ m}^3 \text{s}^{-2}$ . [39, s. 358]

Käytetään jatkossa lyhennettyjä merkintöjä seuraavalla tavalla: Merkitään vektorin  $\vec{x}$  pituutta  $\|\vec{x}\| = x$  ja aikaderivaattaa jatkossa suureen päälle sijoitetulla pisteellä seuraavasti

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \dot{\vec{x}}, \quad \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \ddot{\vec{x}}.$$

Tällöin liikeyhtälö saadaan muotoon

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r}.$$

Tämä liikeyhtälö kuvaa satelliitin liikettä maapallon suhteen, ja ratkaisuna saadaan satelliitin paikka ajan suhteen, eli kiertorata. Kyseessä on toisen asteen epälineaarinen differentiaaliyhtälöryhmä. Tämä voidaan palauttaa ensimmäisen asteen differentiaaliyhtälöryhmäksi merkitsemällä

$$\vec{y} = \vec{y}(t) := \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \dot{\vec{r}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6.$$

Derivoimalla ajan suhteen saadaan

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \dot{\vec{r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\vec{r}} \\ \ddot{\vec{r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \dot{\vec{r}} \end{pmatrix}.$$

Näin saadaan ensimmäisen asteen differentiaaliyhtälöryhmä

$$\dot{\vec{y}} = \mathbf{A} \vec{y}.$$

Tämän differentiaaliyhtälöryhmän epälineaarisuus näkyy matriisin  $\mathbf{A}$  lohkomatriisista  $-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{I}$ . Paikkavektori  $\vec{r}$  on ajan funktio, joten myös sen pituus muuttuu ajan suhteen. Näin myös kerroin  $-\frac{\mu}{r^3}$  riippuu ajasta.

Ratkaistavana on epälineaarinen differentiaaliyhtälöryhmä, joka voidaan kirjoittaa alkuarvo-ongelmana

$$\dot{\vec{y}}(t) = \mathbf{A} \vec{y}(t) =: \vec{h}(\vec{y}(t)), \quad \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0, \quad (3.2)$$

missä differentiaaliyhtälöryhmän määräävää funktiota  $\vec{h}(\vec{y}(t))$  kutsutaan *liikefunktioksi*. Alkuarvo-ongelmalla (3.2) on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu, jos liikefunktio on Lipschitz-jatkuva. [26, s. 383-404] Liitteessä B on osoitettu, että funktio on Lipschitz-jatkuva, kun oletetaan, että paikkavektori ei ole nollavektorin mielivaltaisen pienessä ympäristössä.

Alkuarvoksi differentiaaliyhtälöryhmän ratkaisemisessa tarvitaan vakiovektori  $\vec{y}_0$  eli kuusi vakiota. Nämä vakiot voisivat olla esimerkiksi satelliitin paikka- ja nopeusvektorien komponentit jollain kiinnitetyllä ajanhetkellä, kuten alkuarvo-ongelmassa (3.2) on esitetty. Tällaiset alkuarvot ovat käyttökelpoisia esimerkiksi differentiaaliyhtälöryhmän numeerisessa ratkaisemisessa ja niitä käytetään kappaleessa 5.1 esitetyssä kiertoradan ennustamisessa. Nämä kertovat kuitenkin pelkästään yksittäisen tilan kiertoradalta, eivätkä havainnollista kiertoradan yleistä muotoa, jota tässä luvussa haetaan.

Toinen vaihtoehto on muodostaa tarvittavat vakiot tarkastelemalla satelliitin liikkeeseen liittyviä fysikaalisia suureita, kuten paikan ja nopeuden avulla määriteltäviä pyörimismäärää, sekä näiden avulla edelleen määriteltäviä eksentrisyyttä. Seuraavassa kappaleessa 3.1 ratkaistaan tarvittavat vakiot siten, että saadaan yhteys ellipsin muotoisiin kiertoratoihin. Tässä tarkastelussa saadaan ratkaistua satelliitin radan muoto sekä sijainti maapallon suhteen. Tällöin satelliitin paikkaa kyseisellä radalla voidaan kuvata sopivasti valitun kulman avulla.

Gravitaatiolaki kuvaa satelliittien liikettä ideaalitilanteessa, missä maapallo ja satelliitti vuorovaikuttaisivat keskenään ilman mitään häiriötekijöitä. Todellisuudessa satelliitin kiertorataan vaikuttavat monet muutkin tekijät, joista merkittävimpiä ovat maapallon massan epätasainen jakautuminen sekä satelliitin vuorovaikutus Auringon ja Kuun kanssa. Näistä kerrotaan hiukan tarkemmin kappaleessa 3.3.

### 3.1 Liiketyhtälön ratkaiseminen

Ideaalitilanteessa satelliitit kiertävät maapalloa ellipsien muotoisilla radoilla Keplerin ensimmäisen lain mukaisesti. Ellipsin muotoista rataa ja satelliitin sijaintia kyseisellä radalla voidaan kuvata tarkasti kuudella parametrilla. Parametrit voisivat olla esimerkiksi satelliitin paikka- ja nopeusvektorien komponentit tai vaihtoehtoisesti Keplerin mukaan nimetyt parametrit.

Tarkastellaan aluksi hieman tarkemmin liiketyhtälön (3.1) ratkaisemista. Samalla näytetään, että yhtälön ratkaisukäyrä todella on ellipsi. Olkoon satelliitin paikka- ja nopeusvektorit  $\vec{r}, \dot{\vec{r}} \in \mathbb{R}^3$  ajanhetkellä  $t$ . Oletetaan, että paikkavektori ja nopeusvektori eivät ole yhdensuuntaisia eivätkä nollavektoreita. Tämän seurauksena kiertoradasta saadaan järkevä, sillä muuten satelliitin rata kulki suoraan maapallon



keskipistettä kohti tai vaihtoehtoisesti kohtisuorassa poispäin maapallosta. Nämä oletukset myös takaavat differentiaaliyhtälöryhmän määräävän liikefunktion (3.2) Lipschitz-jatkuvuuden, mikä on näytetty liitteessä B.

Tarkastellaan nyt satelliitin paikan ja nopeuden avulla määriteltyä pyörimismäärää  $\vec{L} = m_{\text{sat}} \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ . [16, s. 174] Määritellään vektori  $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$  pyörimismääränä massayksikköä kohti

$$\vec{k} := \frac{\vec{L}}{m_{\text{sat}}} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}. \quad (3.3)$$

Koska edellä oletettiin, että  $\vec{r} \nparallel \dot{\vec{r}}$  ja  $\vec{r}, \dot{\vec{r}} \neq \vec{0}$ , ei myöskään näiden ristitulona saatu vektori  $\vec{k}$  ole nollavektori.

Lasketaan seuraavaksi vektorin  $\vec{k}$  aikaderivaatta. Ristitulon derivaatta saadaan laskettua kaavalla

$$\frac{d}{dt} (\vec{a} \times \vec{b}) = \left( \frac{d\vec{a}}{dt} \right) \times \vec{b} + \vec{a} \times \left( \frac{d\vec{b}}{dt} \right),$$

jolloin yhtälön (3.3) derivaataksi saadaan

$$\dot{\vec{k}} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{0} + \vec{r} \times \left( -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \right) = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \times \vec{r} = \vec{0}. \quad (3.4)$$

Tässä käytetään vektorien ristitulon ominaisuutta, että vektorin ristitulo itsensä kanssa antaa nollavektorin. Näin ollen vektori  $\vec{k}$  on ajan suhteen vakio, jolloin myös sen suunta säilyy. Koska pyörimismäärä on paikan ja nopeuden ristitulona koko ajan kohtisuorassa liikettä vasten, on liikkeen oltava samassa tasossa. Tätä tasoa kutsutaan ratatasoksi.

Lasketaan aputuloksena paikkavektorin pituuden aikaderivaatta

$$\dot{r} = \frac{d\|\vec{r}\|}{dt} = \frac{d}{dt} (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{2r_x \frac{dr_x}{dt} + 2r_y \frac{dr_y}{dt} + 2r_z \frac{dr_z}{dt}}{(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \frac{\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}}{r}. \quad (3.5)$$

Tarkastellaan nyt vektorin  $\vec{k}$  ristituloa kiihtyvyyden kanssa

$$\begin{aligned} \vec{k} \times \ddot{\vec{r}} &= \left( \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \right) \times \left( -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \right) = -\frac{\mu}{r^3} [(\vec{r} \cdot \vec{r}) \dot{\vec{r}} - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \vec{r}] \\ &\stackrel{(3.5)}{=} -\frac{\mu}{r^3} (r^2 \dot{\vec{r}} - r \dot{r} \vec{r}) = -\mu \left( \frac{1}{r} \dot{\vec{r}} - \frac{\dot{r}}{r^2} \vec{r} \right) = \frac{d}{dt} \left( -\frac{\mu}{r} \vec{r} \right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

missä viimeinen yhtäsuuruus nähdään derivoimalla osamäärää  $-\mu\vec{r}/r$ . Toisaalta voidaan laskea vektoreiden  $\vec{k}$  ja  $\dot{\vec{r}}$  ristitulon aikaderivaatta, jolloin saadaan

$$\frac{d}{dt} (\vec{k} \times \dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{k}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{k} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{k} \times \ddot{\vec{r}}. \quad (3.7)$$

Tässä käytetään yhtälössä (3.4) saatua tietoa siitä, että aikaderivaattavektori  $\dot{\vec{\mathbf{k}}}$  on nollavektori. Yhdistämällä yhtälöt (3.6) ja (3.7) saadaan

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{k}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}}) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{\mu}{r}\vec{\mathbf{r}}\right).$$

Tämä voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{k}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}} + \frac{\mu}{r}\vec{\mathbf{r}}\right) = \vec{\mathbf{0}},$$

jolloin saadaan

$$\vec{\mathbf{k}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}} + \frac{\mu}{r}\vec{\mathbf{r}} = \text{vakio} =: -\mu\vec{\mathbf{e}}. \quad (3.8)$$

Näin määritellyllä vakiovektorilla  $\vec{\mathbf{e}}$  on merkittäviä ominaisuuksia, joka nähdään myöhemmin. Koska vektori  $\vec{\mathbf{k}}$  on kohtisuorassa ratatasoa vastaan, on ristitulovektori  $\vec{\mathbf{k}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}}$  ratatasolla. Toisaalta myös paikkavektori  $\vec{\mathbf{r}}$  on luonnollisesti ratatasossa. Näin ollen kahdesta ratatason vektorista lineaarikombinaationa saatu vektori  $\vec{\mathbf{e}}$  on ratatasossa.

Näin saatiin kaksi ajan suhteen vakiovektoria  $\vec{\mathbf{k}}$  ja  $\vec{\mathbf{e}}$  eli kuusi parametria, jotka kuvaavat satelliitin kiertorataa. Parametrit voidaan muodostaa, kun tiedetään satelliitin paikka ja nopeus jollain ajanhetkellä  $t$ . Parametrit kuvaavat satelliitin kartioleikkauksen muotoista kiertorataa, mikä näytetään seuraavaksi.

Nämä parametrit eivät ole riippumattomia, koska ne ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Näin ollen niiden välillä on riippuvuus  $\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{e}} = 0$ . Siispä riippumattomia parametreja on yhteensä viisi kappaletta. Nämä viisi parametria ilmaisevat täsmällisesti satelliitin kiertoradan muodon ja sijainnin avaruudessa maapallon suhteen, mutta ei satelliitin paikkaa kyseisellä radalla.

Satelliitin paikka voidaan määrittää täsmällisesti sopivasti valitun kulman avulla. Ratatasolla sijaitseva vakiovektori  $\vec{\mathbf{e}}$  voidaan valita perussuunnaksi, jolloin kulma  $\nu$  määritellään vektoreiden  $\vec{\mathbf{e}}$  ja  $\vec{\mathbf{r}}$  väliseksi kulmaksi. Tällöin näiden vektoreiden välinen skalaaritulo on

$$\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{e}} = re \cos(\nu). \quad (3.9)$$

Tämä skalaaritulo voidaan laskea myös käyttämällä vektorin  $\vec{\mathbf{e}}$  määrittelevää yhtälöä (3.8)

$$\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{r}} \cdot \left(-\frac{1}{\mu} \left(\vec{\mathbf{k}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}} + \frac{\mu}{r}\vec{\mathbf{r}}\right)\right) = -\frac{1}{\mu}\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{k}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}} - \frac{1}{r}\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}.$$

Edelleen skalaarikolmitulon ominaisuuksien mukaan  $\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{k}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}} = -\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}}$ , joten käyttämällä vektorin  $\vec{\mathbf{k}}$  määrittävää yhtälöä (3.3), saadaan

$$\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{e}} = \frac{1}{\mu}\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}} - \frac{1}{r}\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}} \stackrel{(3.3)}{=} \frac{1}{\mu}\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{k}} - \frac{1}{r}\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}} = \frac{k^2}{\mu} - r. \quad (3.10)$$

Asettamalla nämä skalaaritulon lausekkeet (3.9) ja (3.10) yhtä suuriksi saadaan

$$re \cos(\nu) = \frac{k^2}{\mu} - r. \quad (3.11)$$

Vakiovektorin  $\vec{e}$  pituus  $e$  on ei-negatiivinen. Jos pituus  $e = 0$ , niin paikkavektorin pituus on vakio  $r = \frac{k^2}{\mu}$ , eikä näin ollen riipu kulmasta  $\nu$ . Tällaisessa tapauksessa kiertorata olisi ympyrä. Jos  $0 \leq e < 1$  voidaan yhtälöstä (3.11) ratkaista paikkavektorin  $\vec{r}$  pituus

$$r = \frac{k^2/\mu}{1 + e \cos(\nu)}.$$

Tämä on kartioleikkauksen yleinen yhtälö napakoordinaattimuodossa, missä vektorin  $\vec{e}$  pituus määrittää tämän kartioleikkauksen eksentrisyyden. Merkitään ei-negatiivista vakiota  $p = k^2/\mu$ .

Paikkavektorin pituus riippuu siis kulmasta  $\nu$ , eli se voidaan kirjoittaa kulman  $\nu$  funktiona

$$r(\nu) = \frac{p}{1 + e \cos(\nu)}.$$

Funktion  $r(\nu)$  minimikohdat saadaan nimittäjän maksimikohdissa, eli silloin kun  $\cos(\nu) = 1$ . Tämä toteutuu kulmissa  $\nu = 0 + n \cdot 2\pi$ , eli vektorin  $\vec{e}$  suunnassa. Minimiarvo on

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + e}.$$

Vastaavasti maksimikohdat saadaan nimittäjän minimikohdissa. Edellä tarkasteltiin tilannetta, missä  $0 < e < 1$ . Tarkastellaan kuitenkin mitä paikkavektorin pituudelle käy, kun  $e \geq 1$ : Tällöin nimittäjästä löytyy nollakohtia, kun  $e \cos(\nu) \rightarrow -1$ , jolloin  $r(\nu) \rightarrow \infty$ . Näin saadaan paikkavektorin pituuden maksimiarvoksi

$$r_{\max} = \begin{cases} \frac{p}{1-e}, & \text{jos } 0 \leq e < 1 \\ \infty, & \text{jos } 1 \leq e \end{cases}.$$

Liikeryhtälön (3.1) ratkaisuna saadaan siis kartioleikkauksen muotoinen rata. Tämä tarkoittaa sitä, että rata voi periaatteessa olla ympyrän, hyperbelin, paraabelin tai ellipsin muotoinen. Edellä nähtiin, että funktio  $r(\nu)$  on rajoitettu ainoastaan, kun  $0 \leq e < 1$ . Tällöin kiertorata on ympyrän ( $e = 0$ ) tai ellipsin ( $0 < e < 1$ ) muotoinen. Jälkimmäistä tapausta käsitellään tarkemmin liitteessä A. Viimeisessä tapauksessa  $e \geq 1$  kiertorata on lähtöarvoista riippuen joko paraabeli tai hyperbeli.

Käytännön kannalta olisi suotavaa, että satelliitti pysyisi Maan kiertolaisena, eikä karkaisi avaruuteen hyperbeli- tai paraabelirataa pitkin. Kiertorataan voidaan vaikuttaa asettamalla satelliitin nopeus alkutilanteessa sopivasti, jolloin eksentrisyys saadaan välille välillä  $0 < e < 1$ . GNSS-satelliiteilla eksentrisyys on tyypilli-

sesti lähellä arvoa 0.01, jolloin kiertorata on hyvin lähellä ympyrää oleva ellipsi. [30, s. 122]

Määritetään vakio  $a$  vektorin  $\vec{r}$  pituuden minimi- ja maksimiarvon keskiarvona [25, s. 18]

$$a := \frac{1}{2}(r_{\min} + r_{\max}) = \frac{p}{1 - e^2},$$

Tällöin paikkavektorin pituus saadaan muotoon

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\nu)}.$$

Liitteessä A on osoitettu, että tämä yhtälö on ekvivalentti ellipsin yleiselle yhtälölle

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

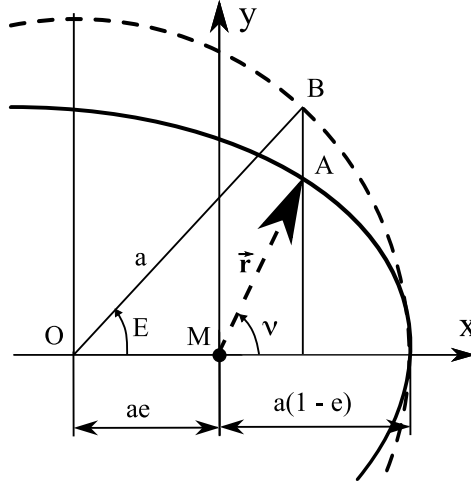
Liitteessä A näkyy myös vakion  $a$  merkitys kiertoradan muodostumisessa: Vakio  $a$  on rataellipsin isopuoliakseli.

## 3.2 Keplerin parametrit

Ellipsiradan koon ja muodon täsmälliseen määrittämiseen tarvitaan siis kaksi parametriä: isopuoliakseli  $a$  ja eksentrisyys  $e$ . Isopuoliakseli määrää radan koon ja eksentrisyys kuvaa puoliakselien suhdetta eli ellipsin muotoa. Eksentrisyys saadaan laskettua myös suoraan akselien suhteesta

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Seuraavaksi tarvitaan parametri, joka määrittää satelliitin sijainnin ellipsillä. Edellä liikeyhtälön ratkaisussa käytettiin satelliitin todellista poikkeamaa eksentrisyysvektorista  $\vec{e}$  maapallon suhteen kuvaavaa kulmaa  $\nu$ , jota kutsutaan *luonnolliseksi anomaliaksi*. *Eksentrisen anomalia*  $E$  saadaan, kun projisoidaan satelliitin paikka rataellipsin ympärille piirretylle ympyräradalle. Perigeumi on kohta jossa satelliitti on radallaan lähimpänä maapalloa, eli perigeumi sijaitsee ratatasolla eksentrisyysvektorin  $\vec{e}$  suunnassa. Eksentrisen anomalia on perigeumin ja tämän projektiopaikan välinen kulma ellipsin keskipisteestä katsottuna.



Kuva 3.1: Luonnollisen anomalian ja eksentrisen anomalian välinen yhteys. Kuvassa maapallo sijaitsee pisteessä  $M$  ja piste  $O$  kuvaa ellipsin keskipistettä. Piste  $A$  on satelliitin todellinen sijainti ellipsiradalla, jota kuvataan luonnollisella anomaliolla  $\nu$ . Vastaavasti piste  $B$  on pisteen  $A$  projektio  $O$ -keskeiselle ympyräradalle, ja tätä kuvataan eksentrisellä anomaliolla  $E$

Satelliitin ratakoordinaatistossa satelliitin kiertorata on  $xy$ -tasossa siten, että peri-geumi sijaitsee  $x$ -akselilla positiivisessa suunnassa. Tällöin satelliitin paikka voidaan esittää kulman  $\nu$  ja vastaavasti kulman  $E$  avulla (kuva 3.1)

$$\vec{r} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\nu)} \begin{pmatrix} \cos(\nu) \\ \sin(\nu) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos(E) - ae \\ a\sqrt{1 - e^2} \sin(E) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Näin saadaan luonnollisen anomalian ja eksentrisen anomalian välille yhteys

$$\nu = \arctan \left( \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin(E)}{\cos(E) - e} \right). \quad (3.12)$$

Nämä kulmat eivät kuitenkaan muutu lineaarisesti ajan suhteen, koska satelliitti liikkuu eri nopeuksilla eri kohdissa kiertorataa.

Määritellään lineaarisesti ajan suhteen käyttäytyvä *keskianomalia*  $M$ , joka ei ole sellaisenaan mikään geometrinen suure.

$$M - M_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_{0e}),$$

missä  $M_0$  on keskianomalia jollain referenssiajanhetkellä  $t_{0e}$ . Keskianomalian nollakohta voidaan valita perigeumin kohdalle, kuten eksentrisen sekä luonnollisen anomaliankin tapauksessa:  $E = \nu = M = 0$ , kun  $t = t_p$ . Tällöin saadaan

$$M_0 = -\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t_p - t_{0e}),$$

missä  $t_p$  on ajanhetki, jolloin satelliitti on perigeumissa.

Keskianomalia esitetään usein keskimääräinen kulmanopeuden  $n$  avulla, joka saadaan keskianomalian aikaderivaattana

$$n = \frac{dM}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}.$$

Näin saadaan keskianomalia muodossa

$$M = n(t - t_p).$$

Keskianomalia vastaa kulmaa perigeumin ja kuvitteellisen satelliitin paikan välillä. Tämä kuvitteellinen paikka on ympyräradalla, jolla on sama keskipiste ja jaksonaika, kuin todellisen satelliitin radalla. Keskianomaliasta saadaan siis laskettua satelliitin todellinen paikka kiertoradalla

$$M = E - e \sin(E).$$

Tätä keskianomalian ja eksentrisen anomalian välistä yhteyttä sanotaan *Keplerin kaavaksi*. [15, s. 39]

Keskianomalia saadaan siis helposti laskettua, kun tiedetään eksentrisen anomalia. Eksentrisen anomalia ei kuitenkaan ratkea suljetussa muodossa keskianomalian suhteen, mutta se saadaan ratkaistua iteratiivisesti. Keplerin kaavaa ratkaistaessa etsitään nollakohtia funktiolle

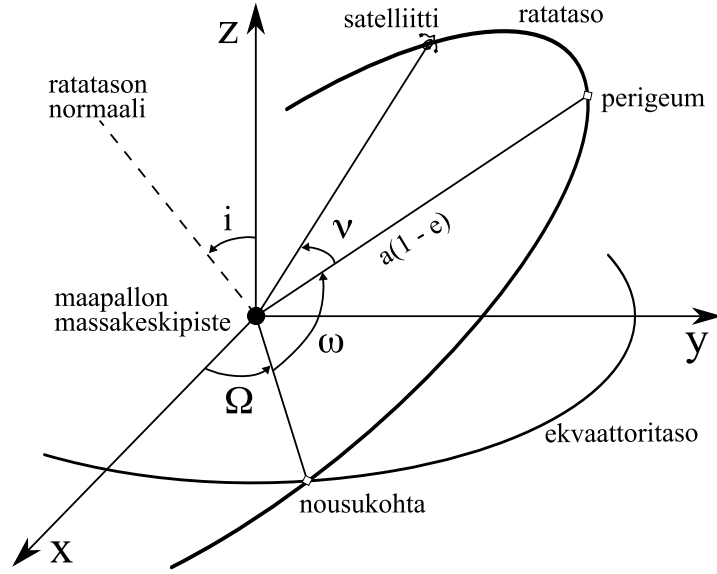
$$h(E) = E - e \sin(E) - M.$$

Tällöin saadaan Newtonin ja Raphsonin [6, s. 69] menetelmällä

$$E_{k+1} = E_k - \frac{h(E_k)}{h'(E_k)} = E_k - \frac{E_k - e \sin(E_k) - M}{1 - e \cos(E_k)}. \quad (3.13)$$

joka suppenee jo muutaman iteraation jälkeen. Alkuarvona voidaan käyttää esimerkiksi arvoa  $E_0 = M$ .

Tämän jälkeen täytyisi ratata sitoa avaruuteen ja erityisesti ECEF-koordinaatistoon. Tämä voidaan tehdä kolmen sopivasti valitun kulman ja



Kuva 3.2: Keplerin parametrit, jotka määräävät satelliitin ratatason. Satelliitin paikan ratatasolla määrää todellinen poikkeama, jonka avulla viimeinen Keplerin parametreista, keskipoikkeama, lasketaan.

kulmia vastaavien koordinaatistomuunnosten (2.3) avulla. Valitaan kulmat siten, että ne vastaavat luvussa 2 esitettyjä Eulerin kulmia (2.6). Ratatasolla satelliitin paikka saatiin ilmaistua etäisyyden  $r$  ja luonnollisen anomalian  $\nu$  avulla. Tällöin tehdään koordinaatistomuunnos, missä pyritään ratatason normaalin, eli z-akselin ympäri luonnollisen anomalian verran

$$\vec{r}_{\text{rata}} = \mathbf{R}_z(\nu)^T \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{R}_z(-\nu) \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\nu) \\ \sin(\nu) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ensimmäinen kulma saadaan, kun kierretään koordinaatistoa sopivasti lisää z-akselin ympäri. *Perigeumin argumentti*  $\omega$  on kulma, joka määrittää perigeumin ja nousukohdan välisen kulman ratatasossa. Tällöin saadaan uusi paikkavektori

$$\vec{r} = \mathbf{R}_z(\omega)^T \vec{r}_{\text{rata}} = \mathbf{R}_z(-\omega) \vec{r}_{\text{rata}} = r \begin{pmatrix} \cos(\nu + \omega) \\ \sin(\nu + \omega) \\ 0 \end{pmatrix},$$

missä on käytetty rotaatiomatriisin ominaisuutta  $\mathbf{R}_i(\theta_1)\mathbf{R}_i(\theta_2) = \mathbf{R}_i(\theta_1 + \theta_2)$ . [23, s. 136]

Toinen kulmaparametri, *inklinaatio*  $i$  ilmaisee ellipsin eli ratatason ja maapallon ekvaattoritason välisen kulman. Toisin sanoen inklinaatio on z-akselin ja ratatason normaalin välinen kulma. Tällöin pyöritään x-akselin ympäri inklinaatiokulman verran ja saadaan paikkavektori

$$\vec{r} = \mathbf{R}_x(-i)\mathbf{R}_z(-\omega)\vec{r}_{\text{rata}} = r \begin{pmatrix} \cos(\nu + \omega) \\ \sin(\nu + \omega) \cos(i) \\ -\sin(\nu + \omega) \sin(i) \end{pmatrix}.$$

Nousukohta on ellipsin ja ekvaattoritason leikkauspisteistä se, missä satelliitti tulee maapallon eteläpuolelta pohjoispuolelle. *Nousukohdan longitudi* eli pituusaste  $\Omega$  kertoo ekvaattoritasolla tämän nousukohdan ja x-akselin välisen kulman, vastapäivään maapallon pohjoispuolelta katsottuna. Tällöin pyöritään jälleen z-akselin ympäri, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\text{ECEF}} &= \mathbf{R}_z(-\Omega)\mathbf{R}_x(-i)\mathbf{R}_z(-\omega)\vec{r}_{\text{rata}} \\ &= r \begin{pmatrix} \cos(\nu + \omega) \cos(\Omega) + \sin(\nu + \omega) \cos(i) \sin(\Omega) \\ -\cos(\nu + \omega) \sin(\Omega) + \sin(\nu + \omega) \cos(i) \cos(\Omega) \\ -\sin(\nu + \omega) \sin(i) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Keplerin parametrit on koottu taulukkoon 3.1 ja niiden merkitystä kiertorataan on havainnollistettu kuvassa 3.2.

Taulukko 3.1: Keplerin parametrit ja niiden yksiköt

$a$	isopuoliakseli [m]
$e$	eksentrisyys [m]
$i$	inklinaatio [rad]
$\Omega$	nousukohdan pituusaste [rad]
$\omega$	perigeumin argumentti [rad]
$M$	keskianomalia [rad]

### 3.3 Ratahäiriöt

Edellä tehtyyn tarkasteluun liittyi oletus satelliitin ja maapallon vuorovaikutuksesta ilman mitään häiriötekijöitä. Maapallon vetovoima onkin merkittävin satelliittiin kohdistuva voima ja tällaisella karkeahkolla mallilla voidaan approksimoida kohtalaisen hyvin satelliitin liikettä. Satelliittiin kohdistuvia muita voimia täytyisi kuitenkin ottaa huomioon tarkempaa analyysiä varten. Tämä voidaan tehdä erilaisilla korjaustermeillä, jotka muokkaavat satelliitin ellipsimäistä rataa.



Yleisesti käytössä oleva keino kiertoradan tarkempaan esittämiseen on rataparametrit, joita käytetään muun muassa GPS-järjestelmässä. Myöskään tämä parametriesitys ei kuvaa rataa tarkasti vaan siinä on lähinnä korjattu Keplerin parametreja ottamalla huomioon häiriötekijöitä. Rataparametrit on kehitetty esittämään rataa lyhyellä aikavälillä, joten ne kuvaavat ellipsiradasta vain yksittäisen pätjän. Rataparametrit siis approksimoivat rataa vain lyhyellä aikavälillä.

Satelliitin rataan vaikuttavat häiriötekijät voidaan jakaa kahteen luokkaan: gravitaatiotekijät ja ei-gravitaatiotekijät. Ensimmäiseen kuuluvat Kuun, Auringon sekä muiden planeettojen vetovoimien aiheuttamat ratahäiriöt. Myös maapallon epädeaalaisuudesta johtuvat tekijät (massan epätasainen jakautuminen) voidaan laskea tähän luokkaan. Toiseen luokkaan voidaan laskea Auringon säteilypaine, aurinkotuuli, magneettikenttä, ilmanvastus. Nämä tekijät ovat kuitenkin suhteellisen pieniä lukuun ottamatta Auringon säteilypainetta.

Taulukko 3.2: Satelliitin rataan vaikuttavien häiriöiden kertaluokat, sekä häiriön vaikutus satelliitin paikkaan rataa integroitaessa. [30, s. 130]

Häiriö	kiihtyvyys [m/s <sup>2</sup> ]	virhe paikassa [m]
Maan epäsymmetrisyys	$5 \cdot 10^{-5}$	10000
Kuun vetovoima	$5 \cdot 10^{-6}$	3000
Auringon vetovoima	$2 \cdot 10^{-6}$	800
Auringon säteilypaine	$9 \cdot 10^{-8}$	200
kiinteän maan vuoksi	$1 \cdot 10^{-9}$	0.3
valtamerten vuoksi	$5 \cdot 10^{-8}$	0.04
Maasta heijastunut säteily	$4 \cdot 10^{-10}$	0.03
suhteellisuusteoreettiset ilmiöt	$3 \cdot 10^{-10}$	0.01
muut häiriöt		< 0.01
ratakorjaukset		

Jos merkitään funktiolla  $\vec{\mathbf{P}}(t, \vec{\mathbf{r}})$ :llä muiden tekijöiden aiheuttamaa häiriökiihtyvyyttä (perturbation acceleration), saadaan likeyhtälö satelliitille muotoon

$$\frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \frac{\vec{\mathbf{F}}(t, \vec{\mathbf{r}})}{m_{\text{sat}}} = \frac{\mu}{\|\vec{\mathbf{r}}\|^3} \vec{\mathbf{r}} + \vec{\mathbf{P}}(t, \vec{\mathbf{r}}), \quad (3.14)$$

missä  $\vec{\mathbf{F}}(t, \vec{\mathbf{r}})$  on satelliittiin vaikuttavien voimien summa. Maapallon vetovoiman aiheuttama kiihtyvyys on kokoluokkaa  $10^{-1}$ , mikä on noin 4 kertaluokkaa suurempi, kuin merkittävin häiriötekijä (Taulukko 3.2).

Funktio  $\vec{\mathbf{P}}(t, \vec{\mathbf{r}})$  voidaan kehittää sarjaksi, jossa otetaan huomioon merkittävimmät häiriötekijät. Tämän jälkeen sarjakehitelmästä voidaan valita merkittävimmät termit, jotka otetaan huomioon likeyhtälön (3.14) analyttisessä ratkai-

semisessä. Kuitenkin liian suuri määrä termejä aiheuttaa monimutkaisia matemaattisia ongelmia. Jos nämä ongelmat poistetaan vähentämällä termejä aiheuttaa approksimaatio epätarkkuutta.

Häiriökiihdytyksen merkittävimpiä tekijöitä voidaan kuvata erilaisilla malleilla ja näin saatu yhtälö voidaan ratkaista numeerisilla menetelmillä. Tähän palataan kappaleessa 5.1.

### 3.4 GPS satelliitin rataparametrit

GPS-satelliitit lähettävät paikannuksessa tarvittavat tiedot vastaanottimeen efemerideissään. Efemeridien sisältävät satelliitin paikan määrittämisessä tarvittavat rataparametrit, jotka pohjautuvat Keplerin parametreihin, mutta sisältävät niin sanottuja korjaustermejä. Nämä korjaustermit kompensoivat satelliitin kiertorataan vaikuttavia häiriötekijöitä, joita esiteltiin kappaleessa 3.3. Korjaustermit on muodostettu kompensoimaan häiriöitä vain lyhyellä aikavälillä, jonka jälkeen radan virhe kasvaa hyvin nopeasti.

Koska efemeridit täytyy laskea etukäteen valmiiksi, ovat ne aina ennustettuja, jolloin ne sisältävät jo sinällään jonkin verran virhettä. Kiertoradan ennustaminen tehdään ratkaisemalla liikeyhtälö numeerisin menetelmin, minkä jälkeen rataparametrit muodostetaan. [37]

Efemeridien rataparametreissa kiertoradan runkona toimii edelleen ellipsi, jonka määrittävät isopuoliakseli  $a$  ja eksentrisyys  $e$ . Myös perigeumin kulmaa  $\omega$  pidetään vakiona. Muihin kolmeen Keplerin parametriin sisällytetään häiriötekijöiden aiheuttamat ratakorjaukset. Loput parametrit referenssiajanhetkellä  $t_{0e}$  ovat siis  $i_0$ ,  $\Omega_0$  ja  $M_0$ .

Satelliitin rataan vaikuttavista häiriöistä osa riippuu suoraan satelliitin sijainnista maapallon suhteen (esim. maapallon massan epätasainen jakautuminen pyörimisakselin suunnassa), ja osa kääntää ratatasoa tasaisesti samaan suuntaan lyhyellä aikavälillä (esim. kuun ja auringon vetovoimat ja auringon säteilypain).

Inkлинаatiokulma sekä nousukohdan pituusaste muuttuvat hiukan ajan suhteen, joten näille annetaan korjaustermeinä aikaderivaatat  $\dot{i}$  sekä  $\dot{\Omega}$ . Korjattu pituuspiiri on

$$\Omega_k = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \Omega_e)t_k - \Omega_e t_{0e}, \quad (3.15)$$

missä  $\Omega_e = 7.2921151 \cdot 10^{-5}$  rad/s on maapallon pyörimisnopeus. Myös laskettuun keskikulmanopeuteen annetaan korjaustermi  $\Delta n$ , joka aiheuttaa satelliitin paikkaan kiertoradalla pienen muutoksen. Korjattu kesianomalia on tällöin

$$M_k = M_0 + \left( \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} + \Delta n \right) t_k. \quad (3.16)$$

Näin saadaan laskettua myös korjauksen vaikutus luonnolliseen anomaliaan  $\nu_k$  kaavojen (3.12) ja (3.13) avulla.

Korjatun luonnollisen anomalian ja perigeumin kulman avulla voidaan laskea satelliitin paikan leveyspiiri.

$$\phi_k = \nu_k + \omega,$$

Leveyspiiri on kulma, joka hyvin kuvaa satelliitin sijaintia maapallon suhteen. Loput kuusi korjaustermiä ovat sinin ja kosinin kertoimia, kun kulmana käytetään leveyspiiriä. Korjaukset tehdään suoraan ratatason inkliinaatioon sekä satelliitin etäisyyteen ja leveyspiiriin.

$$\begin{aligned} \delta\phi_k &= C_{us} \sin(2\phi_k) + C_{uc} \cos(2\phi_k) \\ \delta r_k &= C_{rs} \sin(2\phi_k) + C_{rc} \cos(2\phi_k) \\ \delta i_k &= C_{is} \sin(2\phi_k) + C_{ic} \cos(2\phi_k) \end{aligned}$$

Tällöin saadaan korjatut kaavat inkliinaatiolle, etäisyydelle ja leveyspiirille

$$\begin{aligned} u_k &= \phi_k + \delta\phi_k \\ r_k &= a(1 - e \cos(E_k)) + \delta r_k \\ i_k &= i_0 + \dot{i} t_k + \delta i_k. \end{aligned} \quad (3.17)$$

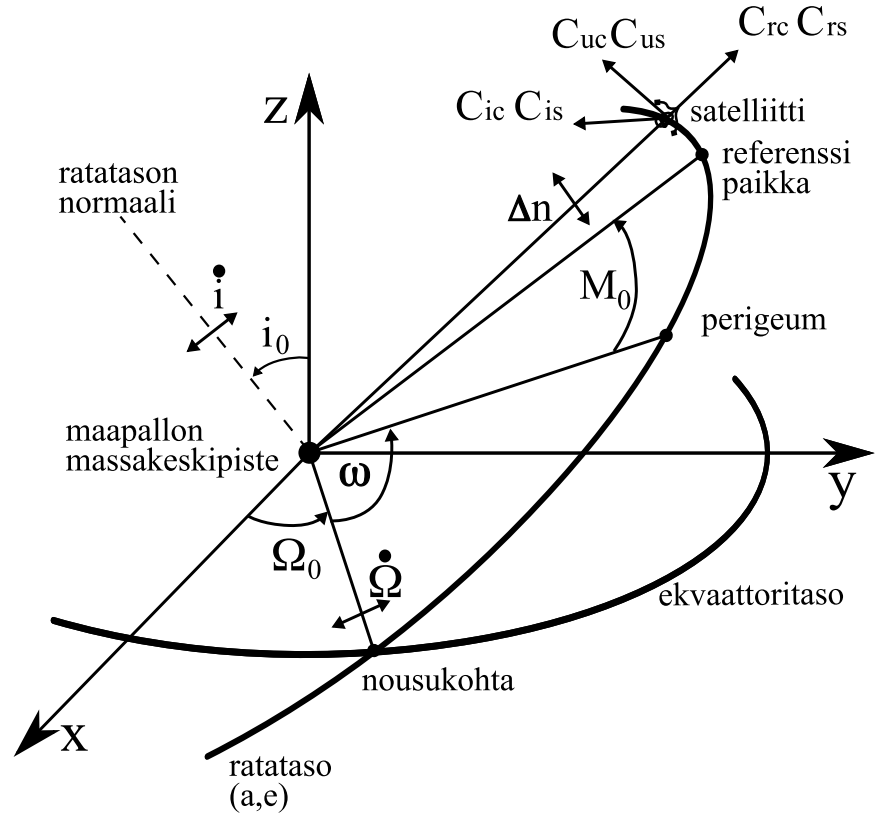
Tällöin saadaan laskettua satelliitin korjattu paikka ratakoordinaateissa

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}_{\text{rata}} = \begin{pmatrix} r_k \cos(u_k) \\ r_k \sin(u_k) \\ 0 \end{pmatrix},$$

ja edelleen ECEF koordinaateissa

$$\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix}_{\text{ECEF}} = \mathbf{R}_z(-\Omega_k) \mathbf{R}_x(-i_k) \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}_{\text{rata}} = \begin{pmatrix} x_p \cos(\Omega_k) + y_p \cos(i_k) \sin(\Omega_k) \\ x_p \sin(\Omega_k) + y_p \cos(i_k) \cos(\Omega_k) \\ y_p \sin(i_k) \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Kaikki rataparametrit on koottu taulukkoon 3.3 ja niiden merkitystä kiertorataan on havainnollistettu kuvassa 3.3.



Kuva 3.3: GPS-järjestelmän efemeridin sisältämien rataparametrien vaikutukset satelliitin kiertorataan.

Taulukko 3.3: GPS-järjestelmän efemeridin sisältämät rataparametrit.

$t_{oe}$	efemeridin referenssiaika
$\sqrt{a}$	ellipsin isopuoliakselin neliöjuuri
$e$	ellipsin eksentisyys
$i_0$	inklinaatio referenssiajanhetkellä
$\Omega_0$	nousukohdan pituusaste GPS-viikon alussa
$\omega$	perigeumin argumentti
$M_0$	keskianomalia referenssiajanhetkellä
$\Delta n$	korjaus laskettuun keskikulmanopeuteen
$\dot{i}$	inklinaatiokulman muutosnopeus ajan suhteen
$\dot{\Omega}$	nousukohdan pituusasteen muutosnopeus ajan suhteen
$C_{uc}, C_{us}$	leveysasteen harmonisen korjauksen amplitudit
$C_{rc}, C_{rs}$	säteen harmonisen korjauksen amplitudit
$C_{ic}, C_{is}$	inklinaatiokulman harmonisen korjauksen amplitudit

# Luku 4

## Optimointiteoriaa

Optimointitehtävä tarkoittaa matemaattisen mallin sovittamista mitattuun dataan mahdollisimman hyvin annettujen ehtojen mukaisesti. Yleensä optimoinnissa haetaan erilaisilla menetelmillä mallin tuntemattomia parametreja. Joskus optimoinnissa on mahdollisuus päästä analyyttisesti ratkaisuun, mutta useimmiten käytännön optimointitehtävissä on turvauduttava numeerisiin menetelmiin. Tyypillisesti optimoinnissa mallin ja mittausdatan välistä virhettä, eli residuaalia, yritetään minimoida.

Matemaattiset optimointitehtävät voidaan jakaa optimoitavan mallin tyypin mukaan kahteen osaan: lineaariseen ja epälineaariseen optimointiin. Lineaarinen optimointi on yleisesti ottaen yksinkertaisempaa ja laskennallisesti nopeampaa. Epälineaariseen optimointiin ei yleensä ole olemassa yksikäsitteisesti parasta menetelmää, jolloin menetelmä täytyy valita ongelman ehdoilla.

Tässä työssä optimoitavat funktiot ovat epälineaarisia, joten keskitytään tässä kappaleessa pääasiassa epälineaarisen optimoinnin esittelyyn. Useimmat epälineaarisen optimoinnin menetelmät pyrkivät approksimoimaan optimoitavaa mallia siten, että siihen voidaan käyttää neliöllisestä optimoinnista saatuja työkaluja. Tällöin ratkaisua haetaan tyypillisesti iteratiivisesti askel kerrallaan. Myös lineaariset optimointiongelmat ratkeavat epälineaarisen optimoinnin menetelmillä.

Rajoitetussa optimoinnissa optimoitavia funktioita tai parametreja rajoitetaan jollain ehdoilla. Tässä työssä optimoitavat parametrit ovat taulukossa 3.3 esitetyt rataparametrit. Rataparametreista eksentrisyys rajoitettiin välille  $(0, 1)$  ja ellipsin isopuoliakseli  $a$  sekä sen neliöjuuri ovat positiivisia. Muut rataparametrit ovat rajoittamattomia. Rajoitteet voidaan ottaa huomioon *sakkofunktioilla*, joiden avulla rajoitettu optimointiongelma voidaan ratkaista rajoittamattoman optimoinnin keinoilla. Sakkofunktiolla aiheutetaan tilanne, missä rajoite-ehdot toteuttamaton ratkaisu on aina epäedullisempi vaihtoehto ehdot toteuttavaan ratkaisuun verrattuna.

## 4.1 Epälineaarinen pienimmän neliösumman optimointi

Olkoon meillä tilanne, jossa vastaanotetaan mittauksia  $\vec{y}$ . Nämä mittaukset riippuvat epälineaarisen funktion  $\vec{M}$  kautta tilasta  $\vec{x}$ , eli

$$\vec{y} = \vec{M}(t, \vec{x}).$$

Funktio  $M$  kuvaa siis systeemiä, jonka parametrit ovat vektorissa  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ . Funktioon syötetään ajanhetki  $t_j$  ja ulostulona saadaan vektori  $\vec{y}_j \in \mathbb{R}^p$ . Todellisuudessa systeemissä esiintyy kaikenlaisia virhetekijöitä: kohinaa, mittausvirhettä, yms. Tällöin mallinnetaan

$$\vec{y}_j = \vec{M}(t_j, \vec{x}) + \vec{\epsilon}_j,$$

missä vektori  $\vec{\epsilon}_j \in \mathbb{R}^p$  kuvaa tuntematonta satunnaisvirhettä.

Kerätään kaikilla ajanhetkillä  $t_j$  saadut mittaukset  $\vec{y}_j$  yhteen mittausdatavektoriin

$$\vec{y} = (\vec{y}_1^T, \vec{y}_2^T, \dots, \vec{y}_k^T)^T = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T \in \mathbb{R}^m,$$

missä  $kp = m$ . Tällöin mallin ja mittauksen välistä virhettä, eli residuaalia kuvaava funktio  $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  on

$$\vec{f}(\vec{x}) := \vec{y} - \vec{M}(\vec{t}, \vec{x}),$$

ja optimointitehtävä on tämän residuaalin minimoiminen. Oletetaan, että residuaalifunktio  $\vec{f}$  on kahdesti derivoituva. Optimointitehtävän ratkaisuna saadaan tilaestimaatti  $\hat{\vec{x}}$ , jolla malli kuvaa mahdollisimman hyvin mittausdataa. Tässä työssä *mahdollisimman hyvin* tarkoittaa pienimmän neliösumman mielessä haettua minimikohtaa. Tällöin tilaestimaatti saadaan minimoimalla residuaalin (2)-normin neliötä

$$\hat{\vec{x}} = \arg \min_{\vec{x}} \|\vec{f}(\vec{x})\|^2 = \arg \min_{\vec{x}} \sum_{i=1}^m (f_i(\vec{x}))^2 = \arg \min_{\vec{x}} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (f_i(\vec{x}))^2.$$

Tässä kerroin  $\frac{1}{2}$  lisätään mukavuussyistä. Se ei vaikuta tilaestimaatin ratkaisemiseen, mutta tällöin derivaattafunktio saadaan kauniimpaan muotoon.

Määritellään  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  residuaalifunktion normin neliönä

$$F(\vec{x}) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (f_i(\vec{x}))^2 = \frac{1}{2} \vec{f}(\vec{x})^T \vec{f}(\vec{x}). \quad (4.1)$$

Tätä funktiota kutsutaan optimointitehtävän *kohdefunktioksi* tai *sakkofunktioksi*. Tällöin pienimmän neliösumman tehtävänä on löytää sellaiset parametrit, jotka minimoivat tämän kohdefunktion.

Funktiolla  $F$  on *lokaali minimi* pisteessä  $\hat{\vec{x}}$ , jos on olemassa avoin punkteerattu ympäristö, missä  $F(\hat{\vec{x}})$  minimoituu, eli

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ \quad \text{s.e.} \quad 0 < \|\hat{\vec{x}} - \vec{x}\| < \delta \Rightarrow F(\hat{\vec{x}}) < F(\vec{x}).$$

Funktion *globaali minimi* on puolestaan pienin kaikista lokaaleista minimeistä. Näin ollen optimointitehtävän ratkaisemisessa haetaan kohdefunktion globaalia minimiä, mikä löydetään tutkimalla lokaaleja minimejä.

Approksimoidaan kohdefunktiota tilan  $\vec{x}$  ympäristössä Taylorin sarjakehitelmällä [36, s. 611-612]

$$\begin{aligned} F(\vec{x} + \Delta\vec{x}) &\approx F(\vec{x}) + \Delta\vec{x}^T F'(\vec{x})^T + \frac{1}{2} \Delta\vec{x}^T F''(\vec{x}) \Delta\vec{x} \\ &= F(\vec{x}) + \Delta\vec{x}^T \nabla F(\vec{x}) + \frac{1}{2} \Delta\vec{x}^T \mathbf{H}(\vec{x}) \Delta\vec{x}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

missä  $\nabla F(\vec{x})$  on kohdefunktion *gradientti*, eli derivaatan transpoosi

$$\nabla F(\vec{x}) = F'(\vec{x})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial F(\vec{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

ja  $\mathbf{H}(\vec{x})$  on kohdefunktion *Hessen matriisi*

$$\mathbf{H}(\vec{x}) = F''(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F(\vec{x})}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F(\vec{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F(\vec{x})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Funktion lokaalissa minimikohdassa gradientti on nolla. Tällaisia funktion  $F$  gradientin nollakohtia sanotaan funktion *kriittisiksi pisteiksi*. Vektori  $\vec{x}_k$  on funktion  $F$  kriittinen piste, jos

$$\nabla F(\vec{x}_k) = \vec{0}.$$

Kriittinen piste voi olla lokaali minimi mutta se voi olla myös lokaali maksimi. Lisäksi on kriittisiä pisteitä, jotka eivät ole lokaaleja minimejä eivätkä maksimeja, jolloin niitä sanotaan funktion *satulapisteiksi*. Kriittisen pisteen laadun tutkimiseksi täytyy tarkastella Taylorin sarjakehitelmässä (4.2) erityisesti toisen asteen termiä eli Hessen matriisia.

Kriittisessä pisteessä kohdefunktion gradientti on nolla, joten kehittämällä Taylorin sarjan kriittisen pisteen ympäristöön saadaan

$$F(\vec{x}_k + \Delta\vec{x}) - F(\vec{x}_k) \approx \frac{1}{2} \Delta\vec{x}^T \mathbf{H}(\vec{x}) \Delta\vec{x}. \quad (4.5)$$

Jos Hessen matriisi  $\mathbf{H}(\vec{\mathbf{x}})$  on positiivisesti definiitti, niin  $\Delta\vec{\mathbf{x}}^T \mathbf{H}(\vec{\mathbf{x}}) \Delta\vec{\mathbf{x}} > 0$ . Tällöin saadaan pienillä askelilla  $\Delta\vec{\mathbf{x}}$  yhtälöstä (4.5) epäyhtälö  $F(\vec{\mathbf{x}}_k + \Delta\vec{\mathbf{x}}) < F(\vec{\mathbf{x}}_k)$ . Näin ollen kriittinen piste  $\vec{\mathbf{x}}_k$  on lokaali minimi, kun Hessen matriisi on positiivisesti definiitti. Vastaavalla tarkastelulla huomataan, että Hessen matriisin ollessa negatiivisesti definiitti kriittinen piste  $\vec{\mathbf{x}}_k$  on lokaali maksimi. Satulapisteissä Hessen matriisi on indefiniitti, eli se ei ole positiivisesti eikä negatiivisesti definiitti. Lisäksi on tapauksia, joissa Hessen matriisi ei ole mikään edellä kuvatuista tapauksista, jolloin se on positiivisesti tai negatiivisesti semidefiniitti. Tällöin Hessen matriisin avulla ei voida tehdä johtopäätöksiä kriittisen pisteen laadusta, vaan joudutaan turvautumaan kolmannen derivaatan tarkasteluun. [14, s. 71-73]

Globaali minimi voidaan siis löytää tutkimalla kohdefunktion kriittisiä pisteitä, eli gradientin nollakohtia. Kriittisen pisteen laatu saadaan selville tarkastelemalla kohdefunktion Hessen matriisia kyseisessä pisteessä. Numeerisilla menetelmillä ratkaisu tapahtuu iteratiivisesti: Annetusta lähtöarvosta lähtien ratkaisua haetaan askeleittain, ja aina edellisen askeleen perusteella yritetään löytää parempi approksimaatio ratkaisulle. Usein kullakin askeleella kohdefunktiota approksimoidaan tilan  $\vec{\mathbf{x}}^i$  ympäristössä Taylorin sarjakehitelmällä, jonka minimikohdasta saadaan seuraavassa askeleessa käytettävä tila  $\vec{\mathbf{x}}^{i+1}$ .

Tarkastellaan seuraavaksi, miten kohdefunktion ensimmäinen ja toinen derivaatta eli gradientti (4.3) sekä Hessen matriisi (4.4) saadaan residuaalifunktion avulla. Derivoimalla kohdefunktiota (4.1) vektorin  $\vec{\mathbf{x}}$  komponentin  $x_j$  suhteen, saadaan osittaisderivaatta

$$\frac{\partial F(\vec{\mathbf{x}})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (f_i(\vec{\mathbf{x}}))^2 \right) = \sum_{i=1}^m \left( f_i(\vec{\mathbf{x}}) \frac{\partial f_i(\vec{\mathbf{x}})}{\partial x_j} \right).$$

Sijoitetaan tämä yhtälöön (4.3), jolloin saadaan

$$\nabla F(\vec{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \left( f_i(\vec{\mathbf{x}}) \frac{\partial f_i(\vec{\mathbf{x}})}{\partial x_1} \right) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m \left( f_i(\vec{\mathbf{x}}) \frac{\partial f_i(\vec{\mathbf{x}})}{\partial x_n} \right) \end{pmatrix} = \mathbf{J}(\vec{\mathbf{x}})^T \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{x}}). \quad (4.6)$$

Tässä matriisi  $\mathbf{J}(\vec{\mathbf{x}})$  on residuaalifunktion *Jacobin matriisi*

$$\mathbf{J}(\vec{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{\mathbf{x}})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\vec{\mathbf{x}})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\vec{\mathbf{x}})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(\vec{\mathbf{x}})}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$



Hessen matriisissa tarvitaan residuaalifunktion toisia osittaisderivaattoja. Derivoidaan kohdefunktiota vektorin  $\vec{x}$  komponenttien  $x_j$  ja  $x_k$  suhteen, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_k} &= \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (f_i(\vec{x}))^2 \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{i=1}^m f_i(\vec{x}) \frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_k} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_j} \frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_k} \right) + \sum_{i=1}^m \left( f_i(\vec{x}) \frac{\partial^2 f_i(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_k} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Kun tämä sijoitetaan yhtälöön (4.4) saadaan Hessen matriisi muotoon

$$\mathbf{H}(\vec{x}) = F''(\vec{x}) = \mathbf{J}(\vec{x})^T \mathbf{J}(\vec{x}) + \sum_{i=1}^m \left( f_i(\vec{x}) \vec{f}''(\vec{x}) \right) = \mathbf{J}(\vec{x})^T \mathbf{J}(\vec{x}) + \mathbf{S}(\vec{x}), \quad (4.8)$$

missä käytetään merkintää  $\mathbf{S}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^m \left( f_i(\vec{x}) \vec{f}''(\vec{x}) \right)$ . Joskus matriisi  $\mathbf{S}(\vec{x})$  jätetään kokonaan pois Hessen matriisia laskettaessa, jolloin saadaan *pienen residuaalin menetelmä*. Tämä soveltuu erityisesti tapauksiin  $\|F(\vec{x})\| \approx 0$ . Matriisia  $\mathbf{S}(\vec{x})$  voidaan myös arvioida iteratiivisesti laskennan aikana, kuten tässä työssä käytetyssä optimointimenetelmässä tehdään kappaleessa 4.3.

Kohdefunktion minimi, eli  $F(\hat{\vec{x}})$ , saadaan siis gradientin nollakohdassa. Tällöin myös kohdefunktion derivaattafunktiota täytyy approksimoida Taylorin sarjan avulla tilan  $\vec{x}$  lähistöllä

$$F'(\vec{x} + \Delta\vec{x})^T \approx F'(\vec{x})^T + F''(\vec{x})\Delta\vec{x} = \nabla F(\vec{x}) + \mathbf{H}(\vec{x})\Delta\vec{x}.$$

Merkitään tämä gradientti nolaksi ja sijoitetaan gradientille ja Hessen matriisille saadut yhtälöt (4.6) ja (4.7), jolloin saadaan

$$\left( \mathbf{J}(\vec{x})^T \mathbf{J}(\vec{x}) + \mathbf{S}(\vec{x}) \right) \Delta\vec{x} = -\mathbf{J}(\vec{x})^T \vec{f}(\vec{x}). \quad (4.9)$$

Tämä on muotoa  $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$  oleva matriisiyhtälö, josta saadaan suuntavektorille  $\Delta\vec{x}$  pienimmän neliösumman ratkaisu.

Ratkaisemisessa täytyy varmistua, että menetelmä suppenee kohti oikeaa kriittistä pistettä, pienintä lokaalia minimiä. Tämän todentaminen epälineaarille funktioille on usein haasteellista, jolloin valistuneen alkuarvauksen merkitys kasvaa. Useimmiten tarvitaan jotain tietoa mallinnettavasta ongelmasta, jonka perusteella globaali minimikohta löydetään. [14]

### 4.1.1 Pienimmän neliösumman ratkaisu

Tarkastellaan nyt tarkemmin pienimmän neliösumman ratkaisua systeemille, jota kuvaa matriisiyhtälö eli yhtälöryhmä

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}, \quad (4.10)$$

missä  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$  ja  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Yhtälöryhmällä ei aina ole ratkaisua ollenkaan. Tällöin paras approksimaatio ongelman ratkaisulle on etsiä sellainen vektori  $\vec{x}$ , jolla  $\mathbf{A}\vec{x}$  on (2)-normin mielessä mahdollisimman lähellä vektoria  $\vec{b}$ . Toisin sanoen haetaan ratkaisu minimointiongelmalle

$$\min_{\vec{x}} \|\mathbf{A}\vec{x} - \vec{b}\|^2. \quad (4.11)$$

Tällainen pienimmän neliösumman yksikäsitteinen ratkaisu voidaan johtaa monella eri tavalla. Tässä työssä ratkaisu johdetaan kahdella tavalla: ensin havainnollisesti vektoriprojektion avulla ja tämän jälkeen suoraan normia arvioiden mekaanisesti laskemalla.

Oletetaan, että matriisin  $\mathbf{A}$  sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomia, eli että  $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$ . Tällöin pätee ekvivalenssi  $\mathbf{A}\vec{z} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{z} = \vec{0}$ . Tällöin myös  $n \leq m$ , jolloin mittauksia on yhtä paljon tai enemmän kuin tuntemattomia. Jälkimmäisessä tapauksessa  $n < m$  systeemiä sanotaan ylimäärätyksi. Molemmissa tapauksissa yhtälöryhmälle saadaan pienimmän neliösumman ratkaisu  $\hat{\vec{x}}$ . Tällöin saadaan matriisin  $\mathbf{A}$  kuva-avaruudesta

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\vec{b} \in \mathbb{R}^m \mid \vec{b} = \mathbf{A}\vec{x}; \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

vektori  $\mathbf{A}\hat{\vec{x}}$  siten, että  $(\vec{b} - \mathbf{A}\hat{\vec{x}}) \in \mathcal{R}(\mathbf{A})^\perp$ , missä  $\mathcal{R}(\mathbf{A})^\perp$  on kuva-avaruuden ortogonaali komplementti. Tällöin vektori  $\vec{b}$  projisoidaan matriisin  $\mathbf{A}$  kuva-avaruuteen, eli vektori  $\mathbf{A}\hat{\vec{x}}$  on vektorin  $\vec{b}$  vektoriprojektio. Matriisin  $\mathbf{A}$  nolla-avaruus on

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}\}.$$

Koska  $\mathcal{R}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$  [19, s. 375], niin  $\mathbf{A}^T(\vec{b} - \mathbf{A}\hat{\vec{x}}) = \vec{0}$ , jolloin

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\vec{x}} = \mathbf{A}^T \vec{b}. \quad (4.12)$$

Matriisin  $\mathbf{A}$  pystyrit ovat lineaarisesti riippumattomia, joten  $\text{rank}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A}) = n$ . [29, s. 197] Näin ollen matriisi  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  on ei-singulaarinen ja kääntövä. Näin saadaan normaaliyhtälöksi kutsuttu yhtälö (4.12) ratkaistua

$$\hat{\vec{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \vec{b}. \quad (4.13)$$

Näytetään seuraavaksi vielä laskemalla, että tämä ratkaisu todella minimoi lausekkeen  $\|\vec{\mathbf{b}} - \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}\|^2$ . Etsitään minimointiongelman (4.11) normille yläraja ja näytetään, että tämä yläraja saavutetaan sopivalla vektorin  $\vec{\mathbf{x}}$  valinnalla. Otetaan nyt käyttöön merkintä  $\mathbf{B} := \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ . Tällöin

$$\begin{aligned} \|\vec{\mathbf{b}} - \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}\|^2 &= \|\vec{\mathbf{b}} - \mathbf{B}\vec{\mathbf{b}} + \mathbf{B}\vec{\mathbf{b}} - \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}\|^2 \\ &= (\vec{\mathbf{b}} - \mathbf{B}\vec{\mathbf{b}} + \mathbf{B}\vec{\mathbf{b}} - \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}})^T (\vec{\mathbf{b}} - \mathbf{B}\vec{\mathbf{b}} + \mathbf{B}\vec{\mathbf{b}} - \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}) \\ &= \|\vec{\mathbf{b}} - \mathbf{B}\vec{\mathbf{b}}\|^2 + \|\mathbf{B}\vec{\mathbf{b}} - \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}\|^2 + 2(\vec{\mathbf{b}}^T \mathbf{B}\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{b}}^T \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{b}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{B}\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{b}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}) \\ &\stackrel{(*)}{=} \|\vec{\mathbf{b}} - \mathbf{B}\vec{\mathbf{b}}\|^2 + \|\mathbf{B}\vec{\mathbf{b}} - \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}\|^2 \leq \|\vec{\mathbf{b}} - \mathbf{B}\vec{\mathbf{b}}\|^2 \quad \forall \vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Tässä käytettiin kohdassa (\*) matriisin  $\mathbf{B}$  symmetrisyyttä ja idempotenttisuutta sekä ominaisuutta  $\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{A}$ . Nämä matriisin  $\mathbf{B}$  ominaisuudet saadaan suoraan laskemalla

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^T &= (\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T)^T = (\mathbf{A}^T)^T ((\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1})^T \mathbf{A}^T = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T = \mathbf{B} \\ \mathbf{B}\mathbf{B} &= \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T = \mathbf{B} \\ \mathbf{B}\mathbf{A} &= \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Edellä saatu yläraja (4.14) saavutetaan, kun valitaan vektori  $\vec{\mathbf{x}}$  siten, että

$$\|\mathbf{B}\vec{\mathbf{b}} - \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}\|^2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{B}\vec{\mathbf{b}} - \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \mathbf{A}((\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{0}}.$$

Koska  $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$ , niin  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ . Näin saadaan ratkaistua

$$\vec{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \vec{\mathbf{b}}. \tag{4.15}$$

Näin ollen ylimäärätyn lineaarisen yhtälöryhmän (4.10) pienimmän neliösumman ratkaisuksi saadaan projektion avulla (4.13) sekä suoraan laskemalla (4.15)

$$\hat{\vec{\mathbf{x}}} = \arg \min_{\vec{\mathbf{x}}} \|\vec{\mathbf{b}} - \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}\|^2 = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \vec{\mathbf{b}}.$$

## 4.2 Iteratiiviset laskeutumismenetelmät

Palataan nyt tarkastelemaan epälineaarista optimointiongelmaa, josta puhuttiin jo sivulla 31. Erilaisten virhetekijöiden vuoksi (mm. Taylorin sarjalla approksimointi) edellä kuvatulla menetelmällä saatu suuntavektorin  $\Delta\vec{\mathbf{x}}$  ei anna todellista tilaestimaattia. Suuntavektorin avulla saadaan kuitenkin pienimmän neliösumman mielessä pienennettyä residuaalia, eli siirrettyä systeemin tilaa kohti tilaestimaattia.

Lisäksi suuntavektorin ratkaiseminen yhtälöstä (4.9) ei ole kovin yksinkertaista, jos malli on epälineaarinen. Jacobin matriisin laskemisessa funktiota täytyy osittaisderivoida  $n \cdot m$  kertaa ja Hessen matriisin laskemisessa pelkästään matriisin  $\mathbf{S}(\vec{x})$  muodostamisessa osittaisderivaattoja tarvitaan  $\frac{1}{2}mn(n+1)$  kappaletta. [10, s. 130] Jacobin matriisin laskemisessa voidaan käyttää apuna esimerkiksi differenssimenetelmiä ja myös Hessen matriisia voidaan approksimoida tilanteeseen sopivalla menetelmällä.

Iteratiiviset menetelmät koostuvat askelista, joissa edellistä systeemin tilaa pyritään parantamaan askel kerrallaan. Laskeutumismenetelmät ovat iteratiivisia, joissa apuna käytetään optimoitavan funktion gradienttia. Gradientin avulla päätellään, mihin suuntaan kannattaa edetä tilaestimaatin etsimisessä. Suunnan löytämisen jälkeen täytyy vielä päättää, kuinka paljon kyseiseen suuntaan kannattaa edetä.

Iteratiiviset menetelmät eivät yleensä suppene oikeaan minimitilaan äärellisellä määrällä askelia. Tämä johtuu muun muassa laskennassa syntyvästä numeerisista virheistä sekä tehdyistä approksimaatioista. Siispä optimointimenetelmien täytyy itseisesti pysähtyä sopivassa tilanteessa ja tyytyä saavutettuun likimääräiseen minimitilaan. Tämä tapahtuu lopetuskriteerien avulla, joiden täyttymystä tarkastellaan menetelmän jokaisella askeleella.

#### Algoritmi 4.2.1. Laskeutumismenetelmät

1. Valitaan alkutila  $\vec{x}^1$  ja lopetuskriteerit (4.16).
2. Ratkaistaan gradientin  $\nabla F(\vec{x}^k)$  avulla hakusuunta  $\Delta \vec{x}^k$ .
3. Valitaan kerroin  $\lambda^k$ .
4. Haetaan uusi tila  $\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k + \lambda^k \Delta \vec{x}^k$ .
5. Toistetaan kohtia 2-4 kunnes jokin lopetuskriteereistä toteutuu.

Lopetuskriteerit täytyy valita aina tapauskohtaisesti, eli ne muokataan kuhunkin sovellukseen sopivaksi. Usein valitaan monta eri kriteeriä, jolloin yhdenkin kriteerin täyttyminen pysäyttää optimoinnin. Yleisesti käytössä olevia lopetuskriteerejä ovat tässä työssä käytetyt kriteerit:

$$\begin{aligned}
 \|\vec{x}^{k+1} - \vec{x}^k\| &\leq \epsilon_1 \|\vec{x}^k\| \\
 \|F(\vec{x}^{k+1}) - F(\vec{x}^k)\| &\leq \epsilon_2 \\
 \|\mathbf{J}(\vec{x}^k)\| &\leq \epsilon_3 \\
 k &\geq N_\epsilon,
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

missä  $\epsilon_i$  on pieni positiivinen reaaliluku ja  $N_\epsilon$  on positiivinen kokonaisluku. Tässä ensimmäinen kriteeri pysäyttää optimoinnin, mikäli iteraatioiden välillä ei tilassa enää tapahdu merkittävää muutosta. Toinen kriteeri huomioi, jos kohdefunktion arvossa ei tapahdu muutosta iteraatioiden välillä ja kolmas kriteeri tarkastelee Jacobin matriisin, eli kohdefunktion derivaatan suuruutta. Viimeisessä kriteerissä otetaan suoraan kantaa iteraatioiden lukumäärään.

Käytännössä kaikki epälineaarissa optimoinnissa gradienttia käyttävät menetelmät seuraavat pääpiirteittäin tätä samaa algoritmia 4.2.1. Erot menetelmien välillä ovat gradientin laskemisessa ja käyttötavassa, eli algoritmin askeleissa 2 ja 3. Käytännössä kohdefunktion gradienttia ja erityisesti siinä esiintyvää Hessen matriisia approksimoidaan eri menetelmissä eri tavoin. Jacobin matriisin numeeriseen laskemiseen on myös useita keinoja. Esitellään seuraavaksi käyttökelpoiset, ja samalla tässä työssä käytetyt menetelmät Jacobin matriisin laskemiseen ja hakuskeleiden pituuden valitsemiseen.

### 4.2.1 Jacobin matriisin laskeminen

Jacobin matriisin ja Hessen matriisin laskeminen on mallin epälineaarisuuden vuoksi yleensä melko raskasta. Osittaisderivaattojen laskeminen analyttisesti voi olla lähes mahdotonta, jolloin numeerinen derivointi on välttämätöntä. Derivaattoja voidaan arvioida yleensä tarpeeksi tarkasti differenssiarvioiden avulla.

Funktion  $f(\vec{x})$  gradienttivektorin  $\nabla f(\vec{x}) = (\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n})^T$  differenssiarviot saadaan Taylorin sarjakehitelmän avulla [24, s. 184-187]

$$f(\vec{x} + h_j \vec{e}_j) \approx f(\vec{x}) + \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j} h_j, \quad f(\vec{x} - h_j \vec{e}_j) \approx f(\vec{x}) - \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j} h_j, \quad (4.17)$$

missä  $\vec{e}_j$  on  $j$ :s yksikkövektori ja  $h_j$  on askelpituus.

Näistä saadaan suoraan ratkaistua *eteenpäin* ja *taaksepäin* lasketut *differenssit*. Useammin käytetty approksimaatio gradientille saadaan kuitenkin näiden erotuksena. Tämä *keskeisdifferenssiksi* kutsuttu approksimaatio saadaan siis laskemalla kaavan (4.17) yhtälöiden erotus.

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j} \approx \frac{f(\vec{x} + h_j \vec{e}_j) - f(\vec{x} - h_j \vec{e}_j)}{2h_j}.$$

Näin saadaan laskettua funktion  $\vec{f}(\vec{x})$  Jacobin matriisille  $\mathbf{J}(\vec{x}) = (\mathbf{J}_{ij})_{m \times n}$  approksimaatio, missä jokainen alkio  $\mathbf{J}_{ij}$  saadaan keskeisdifferenssillä

$$\mathbf{J}_{ij} \approx \frac{f_i(\vec{x} + h_j \vec{e}_j) - f_i(\vec{x} - h_j \vec{e}_j)}{2h_j}.$$

Jacobin matriisia ja siinä olevia osittaisderivaattoja arvioitaessa täytyy muistaa, että askelpituus vaikuttaa melko paljon differenssiarvioiden tarkkuuteen: pieni askelpituus aiheuttaa numeerisesti epätarkkoja tuloksia ja liian suuri askelpituus antaa epätasällisen arvion derivaatalle. [10, s. 189-192]

### 4.2.2 Askelpituuden valinta

Laskeutumismenetelmässä jokaisen askeleen aikana hakusuunnan ratkaisemisen jälkeen täytyy päättää, kuinka paljon siirrytään ratkaistuun suuntaan. Hakuaskeleen pituuden valinnalla voidaan vaikuttaa merkittävästi laskeutumismenetelmän suppenemisnopeuteen. Esitellään lyhyesti eräs hyvä tapa hakuaskeleen pituuden valintaan.

*Viivahakumenetelmässä* ideana on etsiä hakusuunnassa optimoitavan funktion minimikohta. Hakusuuntaan, eli pienempiin funktion arvoihin, kuljetaan siis niin kauan, että funktion arvot alkavat taas kasvaa. Määritellään funktio  $h$  siten, että

$$h(s) = \|\vec{f}(\vec{x} + s\Delta\vec{x})\|,$$

missä vektorit  $\vec{x}$  ja  $\Delta\vec{x}$  ovat kiinnitettyjä. Tällöin saadaan yksiulotteinen optimointitehtävä

$$\min_{s>0} h(s)^2,$$

missä skalaari  $s$  optimoitava parametri.

*Newtonin menetelmässä* etsitään iteratiivisesti derivaatan nollakohtaa. Askeleella  $l$  funktion  $h(s)$  quadraalinen Taylorin approksimaatio pisteen  $s_l$  ympäristössä on

$$h(s) \approx h(s_l) + h'(s_l)(s - s_l) + \frac{1}{2}h''(s_l)(s - s_l)^2.$$

Derivoimalla tämän muuttujan  $s$  suhteen saadaan

$$h'(s) \approx h'(s_l) + h''(s_l)(s - s_l).$$

Tällöin etsittäessä derivaattafunktion nollakohtaa saadaan uusi likiarvo

$$s_{l+1} = s_l - \frac{h'(s_l)}{h''(s_l)}.$$

Viivahakumenetelmässä voidaan yksiulotteisen optimointitehtävän ratkaisemisessa käyttää myös muita keinoja, kuten *sekannttimenetelmää* tai *puolitusmenetelmää*. Alkuarvon ollessa riittävän lähellä derivaatan nollakohtaa Newtonin menetelmän suppeneminen on hyvin nopeaa. [6, s. 76-77]

### 4.3 Levenbergin ja Marquardtin menetelmä

Gradienttia käyttävät laskeutumismenetelmät esitettiin yleisesti edellisessä kappaleessa 4.2. Tässä työssä käytetään Levenbergin ja Marquardtin menetelmää eli LM-menetelmää, joka on sekoitus kahdesta tunnetusta laskeutumismenetelmästä: *Nopeimman laskeutumisen* ja *Gaussin ja Newtonin* menetelmistä. Esitellään siis aluksi lyhyesti kyseiset menetelmät.

#### Nopeimman laskeutumisen menetelmä

Nopeimman laskeutumisen menetelmä eli *gradienttimenetelmä* on toimintaperiaatteeltaan varsin yksinkertainen. Ideana menetelmässä on, että kullakin iteraatiokierroksella edetään suuntaan, jossa optimoitavan funktion arvo pienenee eniten. Tämä suunta on negatiivisen gradientin suunta

$$\Delta \vec{x}^k = -\nabla F(\vec{x}^k).$$

Nopeimman laskeutumisen menetelmä toimii kohtalaisen hyvin myös kaukana tilaestimaatista. Menetelmän suurin heikkous on, että se suppenee hitaasti. Tämä johtuu siitä, että peräkkäisten iteraatioiden suunnat ovat keskenään ortogonaalisia, jos askelpituuden valinnassa käytetään viivahakumenetelmää. Tällöin pahimmassa tapauksessa optimoitavan funktion tasa-arvokäyrien ollessa litistyneitä, menetelmä sahaa lyhyillä askelilla kohti kriittistä pistettä. Kuvassa 4.1 on esitetty esimerkkitapaus, missä menetelmän hitaus näkyy hyvin. [20, s. 7-8; 27, s. 259-262]

#### Gaussin ja Newtonin menetelmä

Gaussin ja Newtonin menetelmässä ideana on linearisoida residuaalifunktiota

$$\vec{f}(\vec{x} + \Delta \vec{x}) \approx \vec{f}(\vec{x}) + \nabla \vec{f}(\vec{x}) \Delta \vec{x} =: \vec{g}(\vec{x} + \Delta \vec{x}), \quad (4.18)$$

jolloin  $\bar{\mathbf{g}}'' = \vec{0}$ . Sijoittamalla tämä yhtälöön (4.8) saadaan Hessen matriisiksi

$$\mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{J}(\bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{J}(\bar{\mathbf{x}}).$$

Tällöin normaaliyhtälö (4.9) saadaan muotoon

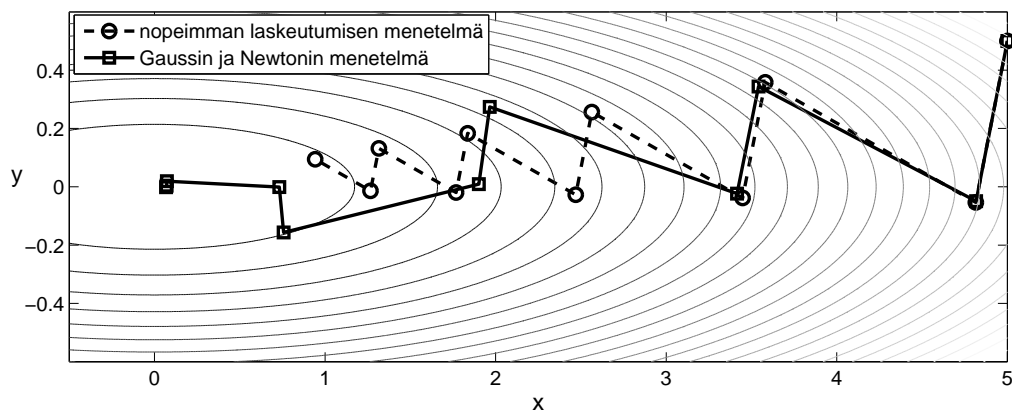
$$\left( \mathbf{J}(\bar{\mathbf{x}}^k)^T \mathbf{J}(\bar{\mathbf{x}}^k) \right) \Delta \bar{\mathbf{x}}^k = -\mathbf{J}(\bar{\mathbf{x}}^k)^T \vec{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}^k),$$

mistä saadaan askeleessa  $k$  ratkaistua suuntavektori  $\Delta \bar{\mathbf{x}}^k$ .

Tässä menetelmässä jätetään Hessen matriisissa (4.8) oleva termi  $\mathbf{S}(\bar{\mathbf{x}})$  kokonaan pois, eli oletetaan termin  $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{J}(\bar{\mathbf{x}})$  dominoivan. Jos  $\|\mathbf{S}(\bar{\mathbf{x}})\|$  on kuitenkin suuri, menetelmän suppeneminen voi olla hyvin hidasta. Lisäksi ongelmana menetelmässä on, ettei se linearisoinnin takia toimi kovin hyvin, mikäli alkutila on huono.

Menetelmän suppeneminen voi siis olla huomattavan hidasta, eikä se välttämättä suppene edes kohti globaalia minimiä. Pahimmassa tapauksessa siis menetelmällä voidaan saada virheellisiä ratkaisuja. Kuitenkin toimiessaan menetelmä suppenee nopeasti, jopa neliöllisesti, mikäli alkuarvaus on riittävän lähellä oikeaa ratkaisua. [5, s. 221-225; 27, s. 259-262]

Kuvassa 4.1 on esimerkkinä Gaussin ja Newtonin menetelmän suppenemista funktiolle  $h(x, y) = x^2 + 30y^2$ . Menetelmää on verrattu Nopeimman laskeutumisen menetelmään ja erot tulevat hyvin esille jo muutaman ensimmäisen iteraation jälkeen. Kymmenen iteraation jälkeen Gaussin ja Newtonin menetelmällä saavutetaan piste  $(0.0676, -0.0016)$ , kun nopeimman laskeutumisen menetelmällä päästään pisteeseen  $(0.9417, 0.0942)$ . Gaussin ja Newtonin menetelmä on siis supennut kertaluokkaa lähemmäksi optimipistettä  $(0, 0)$ .



Kuva 4.1: Funktion  $h(x, y) = x^2 + 30y^2$  tasa-arvokäyriä, sekä 10 ensimmäistä iteraatiota vastaavat tilat nopeimman laskeutumisen menetelmälle sekä Gaussin ja Newtonin menetelmälle. Alkutilana on käytetty pistettä  $(5, 0.5)$ .



## Levenbergin ja Marquardtin menetelmä

Levenbergin ja Marquardtin menetelmässä, eli LM-menetelmässä (Levenberg ja Marquardt) Hessen matriisin muodostamisessa matriisia  $\mathbf{S}(\vec{\mathbf{x}})$  approksimoidaan identiteettimatriisilla, jota kerrotaan sopivalla positiivisella vaimennuskertoimella  $\mu$ . Tällöin normaaliyhtälö (4.9) saadaan askeleessa  $k$  muotoon

$$(\mathbf{J}(\vec{\mathbf{x}}^k)^T \mathbf{J}(\vec{\mathbf{x}}^k) + \mu_k \mathbf{I}) \Delta \vec{\mathbf{x}}^k = -\mathbf{J}(\vec{\mathbf{x}}^k)^T \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{x}}^k), \quad \mu_k \geq 0, \quad (4.19)$$

missä vaimennuskerrointa  $\mu_k$  muokataan jokaisella iteraatiokierroksella. [22] Kutsutaan tätä yhtälöä jatkossa LM-yhtälöksi.

Vaimennuskertoimella voidaan painottaa suuntavektorin edessä olevan kertoimen osia  $\mathbf{J}(\vec{\mathbf{x}}^k)^T \mathbf{J}(\vec{\mathbf{x}}^k)$  ja  $\mathbf{I}$  toisiinsa nähden. Tällöin kertoimen vaikutus menetelmään ilmenee seuraavalla tavalla: [20; 31]

- Suurilla vaimennuskertoimen arvoilla painotetaan identiteettimatriisia, jolloin LM-yhtälö saadaan muotoon

$$\Delta \vec{\mathbf{x}}^k \approx -\frac{1}{\mu} \mathbf{J}(\vec{\mathbf{x}}^k)^T \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{x}}^k).$$

Tällöin LM-menetelmä on hyvin lähellä nopeimman laskeutumisen menetelmää.

- Pienillä vaimennuskertoimen arvoilla painotetaan vastaavasti termiä  $\mathbf{J}(\vec{\mathbf{x}}^k)^T \mathbf{J}(\vec{\mathbf{x}}^k)$ , jolloin LM-yhtälö saadaan muotoon

$$\mathbf{J}(\vec{\mathbf{x}}^k)^T \mathbf{J}(\vec{\mathbf{x}}^k) \Delta \vec{\mathbf{x}}^k \approx -\mathbf{J}(\vec{\mathbf{x}}^k)^T \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{x}}^k).$$

Tällöin LM-menetelmä on hyvin lähellä Gaussin ja Newtonin menetelmää.

- Muulloin LM-menetelmä yhdistelmä kahdesta edellisestä.

Ideana on siis, että nopeimman laskeutumisen menetelmästä ja Gaussin ja Newtonin menetelmästä käytetään sopivasti sekoittaen parhaat puolet. Lisäksi jokaiselle iteraatiolla tarkastellaan, kumpaa menetelmää painotetaan enemmän. Yleensä, jos alkutila ei ole kovin lähellä tilaestimaattia, kannattaa aluksi painottaa enemmän nopeimman laskeutumisen menetelmää, jolloin päästään melko varmasti lähelle oikeaa ratkaisua. Lähemmäksi ratkaisua tultaessa voidaan Gaussin ja Newtonin menetelmää painottamalla nopeuttaa menetelmän suppenemista.

Kullakin askeleella kerroin  $\mu_k$  voidaan määrittää tarkastelemalla, kuinka hyvin lineaarisoitu funktio  $\vec{g}$  kaavassa 4.18 kuvaa alkuperäistä funktiota  $\vec{f}$ . Tämä voidaan tehdä laskemalla *muutossuhde*

$$R_k = \frac{\vec{F}(\vec{x} + \Delta\vec{x}) - \vec{F}(\vec{x})}{\vec{G}(\vec{x} + \Delta\vec{x}) - \vec{G}(\vec{x})},$$

missä  $\vec{G}(\vec{x}) = \frac{1}{2}\vec{g}(\vec{x})^T\vec{g}(\vec{x})$ . Mitä lähempänä tämä suhde on lukua 1, sitä luotettavampi lineaarinen approksimaatio on ja sitä enemmän voidaan Gaussin ja Newtonin menetelmää painottaa. Toisaalta suhteen ollessa lähellä nollaa, täytyy painottaa enemmän nopeimman laskeutumisen menetelmää.

Tässä työssä tehdyissä optimoinneissa kerrointa kaksinkertaistetaan tai puolitetaan tarvittaessa

$$\mu_{k+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}\mu_k, & \text{jos } R_k \geq 0.75 \\ \mu_k, & \text{jos } 0.25 < R_k < 0.75 \\ 2\mu_k, & \text{jos } R_k \leq 0.25 \end{cases} . \quad (4.20)$$

Kertoimen alkuarvo  $\mu_1$  valitaan tilanteen mukaan sopivasti. Mikäli systeemi tunnetaan hyvin ja tilan alkuarvausta voidaan pitää luotettavana, voidaan kertoimeksi valita hyvin pieni luku. Tällöin kuitenkin vähänkin suurempi virhe alkuarvauksessa hidastaa suppenemista merkittävästi. Yleensä onkin varmempaa valita riittävän suuri alkuarvo kertoimelle, jolloin suppeneminen nopeutuu. Tässä työssä käytetään kertoimelle alkuarvoa  $\mu_1 = 1$ .

**Algoritmi 4.3.1.** Levenbergin ja Marquardtin menetelmä

1. Valitaan alkuarvaus  $\vec{x}^1$ , kerroin  $\mu_1$  sekä lopetuskriteerit (4.16).
2. Ratkaistaan hakusuunta  $\Delta\vec{x}^k$  pienimmän neliösumman menetelmällä LM-yhtälöstä (4.19) .
3. Valitaan uusi kerroin  $\lambda^k$  kappaleen 4.2.2 mukaisesti.
4. Haetaan uusi tila  $\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k + \lambda^k \Delta\vec{x}^k$ .
5. Valitaan uusi kerroin  $\mu_{k+1}$  kaavalla (4.20) .
6. Toistetaan kohtia 2-5 kunnes jokin lopetuskriteereistä toteutuu.

# Luku 5

## Satelliitin kiertoradan parametrisointi

Tässä luvussa parametrisoidaan ennustettu GNSS-satelliitin kiertorata. Kiertoradan ennustamisesta kerrotaan aluksi lyhyesti ja tämän jälkeen tehdään varsinainen parametrusointi käyttäen luvussa 3 esitettyä mallia ja luvussa 4 esitettyä optimointimenetelmää. Parametrusointia on myös testattu ennustetun kiertoradan lisäksi myös todelliseen kiertorataan. Saatuja tuloksia arvioidaan sekä verrataan satelliitin ennustettuun ja todelliseen kiertorataan. Kaikki testit tehtiin Matlab-ohjelmistolla.

Ennustuksessa käytetään alkupaikkana broadcast efemeridejä (BE), joita satelliitit lähettävät. Tässä työssä BE:t on ladattu GPS-satelliiteille lähteestä [3] ja GLONASS-satelliiteille lähteestä [11]. Todellisena kiertoratana käytetään IGS:n (engl. International GNSS Service) julkaisemia precise efemeridejä (PE), jotka antavat satelliitin kiertoradan 5 cm:n tarkkuudella. Nämä ovat saatavilla GPS-satelliiteille lähteessä [12] ja vastaavasti GLONASS-satelliiteille lähteessä [13].

### 5.1 Satelliitin kiertoradan ennustaminen

Tässä työssä kiertorata on ensin ennustettu, jonka jälkeen ennustettu rata on parametrisoitu. Radan ennustaminen ei ole tämän työn varsinainen tutkimusongelma. Työssä käytetty data on kuitenkin saatu rataa ennustamalla, joten on syytä aluksi kuvata tätä pääpiirteissään. Ennustamista on esitelty tarkemmin esimerkiksi tutkimusryhmämme julkaisuissa [33; 34; 35].

Luvussa 3 ratkaistiin liikeyhtälö, missä ei otettu huomioon häiriökiihtyvyyttä. Toisin sanoen kiertorata saatiin sellaisessa tapauksessa, missä satelliittiin vaikuttavaksi voimaksi oletettiin pelkästään ideaalisen maapallon painovoima. Satelliitin kier-

toradan ennustamisessa pyritään ratkaisemaan satelliitin liikeyhtälö (3.14), missä otetaan mahdollisimman hyvin huomioon kaikki satelliittiin vaikuttavat voimat.

Aluksi täytyy siis rakentaa liikeyhtälöstä puuttuvat voimat, eli mallintaa häiriökihihtyvyyttä. Korjattu kiihtyvyys voidaan kirjoittaa muodossa

$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{maa}} + \vec{a}_{\text{kuu}} + \vec{a}_{\text{aur}} + \vec{a}_{\text{asp}},$$

missä  $\vec{a}_{\text{maa}}$ ,  $\vec{a}_{\text{kuu}}$ ,  $\vec{a}_{\text{aur}}$ , ja  $\vec{a}_{\text{asp}}$  ovat kiihtyvyydet, jotka aiheutuvat Maan, Kuun ja Auringon gravitaatioista sekä Auringon säteilypaine. Muut taulukossa 3.2 mainitut kiihtyvyydet jätetään huomiotta, koska niiden vaikutus on pieni verrattuna edellä esitettyihin häiriöihin.

Geopotentiaali on tapana esittää palloharmonisten funktioiden lineaarikombinaationa. Palloharmonisten funktioiden ensimmäinen termi vastaa ideaalisen pallomaisien Maan potentiaalia, ja niin sanottu  $J_2$ -termi ottaa huomioon Maan litistyneisyyden. Edelleen, korkeamman asteen palloharmoniset termit korjaavat pienempiä epäsymmetrisyyksiä Maan geopotentiaalissa. Gravitaatiokiihtyvyys  $\vec{a}_{\text{maa}}$ , joka huomioi Maan massan epätasaisen jakautumisen, saadaan geopotentiaalilin gradienttina. [33, s. 24-30]

Tämän jälkeen tarvitaan Kuun sekä Auringon gravitaatioiden aiheuttamat kiihtyvyydet  $\vec{a}_{\text{kuu}}$  ja  $\vec{a}_{\text{aur}}$ . Nämä saadaan kun tiedetään kyseisten kappaleiden paikat maakeskisessä ECI-koordinaatistossa ajan funktiona. Tällöin voidaan kyseiset kiertoradat muuttaa ECEF-koordinaatistoon, minkä jälkeen haluttu kiihtyvyys saadaan Newtonin lakien mukaisesti paikan funktiona. Koordinaatistomuunnoksessa tarvittavat Maan suuntausparametrit eli EOP-parametrit (engl. Earth Orientation Parameters) täytyy estimoida. [33, s. 30-33]

Auringon säteilypaine aiheutuu satelliitin kyvystä emittoida ja absorboida Auringosta tulevia fotoneja. Säteilypaineelle saadaan malli, missä otetaan huomioon Auringon, Maan ja satelliitin keskinäiset sijainnit, sekä huomioidaan kohdat, joissa Maa varjollaan katkaisee säteilypaineen vaikutuksen. Mallissa täytyy myös huomioida yksittäiselle satelliitille tyypillisiä ominaisuuksia, joita ei oteta fyysisessä mallissa huomioon. Tämä tehdään estimoimalla jokaiselle satelliitille ominainen parametri pitkällä aikavälillä. [34, s. 5-6]

Tämän jälkeen häiriökihihtyvyyksien avulla korjattu liikeyhtälö täytyy ratkaista integroimalla. Tällöin saadaan satelliitin paikkakoordinaatit ajan funktiona, eli satelliitin kiertorata. Ratkaisussa tarvittava alkupaikka saadaan suoraan BE:sta ja alkunopeus estimoidaan. Integroinnissa täytyy ottaa huomioon, että BE kuvaa satelliitin antennin paikkaa, kun liikeyhtälön ratkaisussa tarvitaan satelliitin massakeskipiste. [17] Numeerisessa integroinnissa käytetään Runge, Kutta ja Nyströmin menetelmää. [34; 35]

## 5.2 Rataparametrien ratkaiseminen

GPS-satelliittien lähettämät rataparametrit ovat voimassa  $\pm 2$  tunnin ajan kerrallaan, minkä jälkeen satelliitit saavat uudet parametrit. Rataparametrit onkin muodostettu siten, että ne kuvaavat kiertorataa tällaisen suurimmillaan muutaman tunnin pituisen ajanjakson. Kuitenkin tämän työn motivaation mukaisesti kiertorataa halutaan ennustaa muutamien päivien ajaksi, jolloin tarvitaan jokaiselle satelliitille usealle eri ajanjaksolle rataparametreja.

Olkoon yhden sovituksen ajanjakson pituus  $\Delta t$ . Tällöin referenssiajanhetki  $t_{0e}$  voidaan valita puolesta välistä kyseistä ajanjaksoa, jolloin sovitus tehdään ajanhetkestä  $t_{0e} - \frac{1}{2}\Delta t$  ajanhetkeen  $t_{0e} + \frac{1}{2}\Delta t$  asti. Olkoon nyt referenssiajanhetkeä  $t_{0e}$  vastaavat rataparametrit

$$\vec{\mathbf{x}} = \left( t_{0e}, \sqrt{a}, e, i_0, \Omega_0, \omega, M_0, \Delta n, \dot{i}, \dot{\Omega}, C_{uc}, C_{us}, C_{rc}, C_{rs}, C_{ic}, C_{is} \right)^T.$$

Funktio  $M$  laskee näiden parametrien avulla satelliitin paikkakoordinaatit ECEF-koordinaatistossa ajanhetkellä  $t$  (luvussa 3 esitetyt kaavat (3.12 - 3.18))

$$\vec{\mathbf{M}}(t, \vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{r}}(t), \quad t \in \left( t_{0e} - \frac{1}{2}\Delta t, t_{0e} + \frac{1}{2}\Delta t \right), \quad (5.1)$$

missä paikkavektori  $\vec{\mathbf{r}}(t) = (r_x(t), r_y(t), r_z(t), v_x(t), v_y(t), v_z(t))^T$ . Tällöin rataparametrit voidaan estimoida minimoimalla funktion (5.1) avulla saatujen paikkakoordinaattien sekä ennustettujen paikkakoordinaattien  $\vec{\mathbf{y}}$  erotusta

$$\hat{\vec{\mathbf{x}}} = \arg \min_{\vec{\mathbf{x}}} \|\vec{\mathbf{y}} - M(t, \vec{\mathbf{x}})\|^2.$$

Ongelman ratkaisemisessa käytetään luvussa 4 esitettyä algoritmia 4.3.1.

Algoritmissa tarvitaan hyvä alkuarvaus, jolla varmistetaan menetelmän suppeneminen kohti globaalia minimiä. Jos käytössä on edellistä sovitusväliä vastaavat parametrit, voidaan niitä käyttää pohjana uuden sovituksen tekemisessä. Rataparametrien taustalla olevien Keplerin parametrien mukainen ellipsirata pysyy kuitenkin suhteellisen muuttumattomana pitkälläkin aikavälillä, vaikkakin se on vain karkeahko approksimaatio todellisesta kiertoradasta.

Rataparametreja voidaan päivittää aika-askeleen  $\Delta t$  verran eteenpäin, jolloin uusi referenssiaika on

$$t_{0e}^{i+1} = t_{0e}^i + \Delta t.$$

Rataparametreista keskianomalia, nousukohdan longitudi sekä inkliinaatio referenssiajanhetkellä muuttuvat aika-askeleen verran aikaderivaattojensa mukaisesti:

$$\begin{aligned} M_0^{i+1} &= M_0^i + (n^i + \Delta n^i) \Delta t \\ \Omega_0^{i+1} &= \Omega_0^i + (\dot{\Omega}^i - \Omega_e) \Delta t - \Omega_e(t_{0e}^i + \Delta t) \\ i_0^{i+1} &= i_0^i + \dot{i}^i \Delta t \end{aligned}$$

Lyhyellä aika-askeleella muita parametreja voidaan pitää suhteellisen vakioina. Näin saadaan hyvä alkuarvaus uutta referenssiaikaa vastaaville rataparametreille.

Ennustuksen alussa ei vanhoja rataparametreja ole välttämättä saatavilla, jolloin alkuarvaus täytyy kehitellä muita keinoja käyttäen.

### 5.2.1 Alkutila

Optimointiongelmassa oleelliseksi kysymykseksi nousee alkupaikan merkitys. Alkupaikalla tarkoitetaan ennustuksen alussa olevaa paikkatietoa, josta eteenpäin ennustusta lähdetään tekemään. Puhelimessa tapahtuvassa ennustuksessa alkupaikka saadaan satelliitin lähettämistä efemeridistä (BE). Palvelinpäässä ennustukset voidaan tehdä tarkemmista efemeridistä (PE).

GPS-satelliitille ennustuksen alkupaikka saadaan efemeridistä, joka on jo valmiiksi rataparametrimuodossa. Näin saadaan suoraan parametrisoinnissa tarvittava alkupaikka. GLONASS-satelliitin efemeridissä ratatiedot ovat kuitenkin suoraan paikka- ja nopeuskoordinaatteina. Siispä alkupaikka täytyy pystyä ratkaisemaan suoraan paikka-nopeus -koordinaateissa annetusta datasta.

Toisaalta myöskään GPS-satelliiteille ei välttämättä ole aina saatavilla alkupaikkaa. Esimerkiksi ennustusta voidaan tehdä vanhoista efemerideistä ja tällöin rataparametrit halutaan sovittaa vain ennustuksen loppupäähän. Lisäksi ennustuksen aikana voi syntyä tilanteita, joissa parametrisoinnissa menetelmä ei suppene kohti oikeaa minimiä. Tällöin tilanne voidaan korjata aloittamalla optimointi uudelleen uusilla lähtöarvoilla. Siispä alkupaikka täytyy pystyä ratkaisemaan suoraan paikka-nopeus -koordinaateissa annetusta datasta.

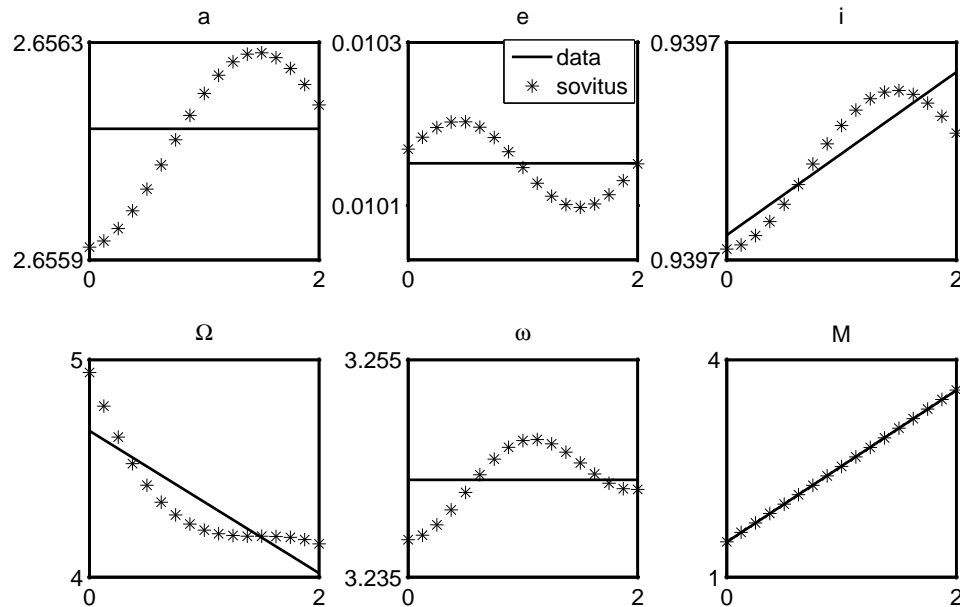
Alkupaikan ratkaiseminen voidaan tehdä normaalien Keplerin parametrien avulla. Keplerin parametrit ratkaistaan kaikilla ajanhetkillä  $t_i \in (t_{0e} - \frac{1}{2}\Delta t, t_{0e} + \frac{1}{2}\Delta t)$ , jolloin saadaan parametrit ajan funktiona. Ajan suhteen vakioina voidaan pitää isopuoliakselia  $\sqrt{a}$ , eksentrisyyttä  $e$  ja perigeumin kulmaa  $\omega$ . Nämä saadaan suoraan datasta keskiarvoina

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}.$$

Tämän jälkeen sovitetaan inkliinaatiokulmalle  $i$ , nousukohdan pituusasteelle  $\Omega$  sekä keskianomaliaalle  $M$  pienimmän neliösumman mielessä ensimmäisen asteen polynomi

$$y(t) = \alpha + \beta x(t) + \epsilon(t),$$

mistä saadaan estimoitua kertoimet  $\alpha$  ja  $\beta$ . Nämä kuvaavat kyseisen Keplerin parametrin lineaarista käyttäytymistä ajan suhteen. Toisin sanoen kertoimesta  $\alpha$  saadaan suoraan referenssiajanhetkellä  $t_{0e}$  kyseiset parametrit  $i_0$ ,  $\Omega_0$  ja  $M_0$ . Aikaderivaattaa kuvaavat korjaustermit  $\dot{i}$ ,  $\dot{\Omega}$  ja  $\Delta n$  saadaan kaavojen (3.17), (3.15) ja (3.16) mukaisesti kertoimesta  $\beta$ .



Kuva 5.1: Yksittäisen satelliitin (PRN 2) kiertoradasta ratkaistut Keplerin parametrit kahden tunnin ajalta. Keplerin parametreihin  $a$ ,  $e$  ja  $\omega$  on tehty ensimmäisen asteen polynomisovitukset sekä parametreihin  $i$ ,  $\Omega$  ja  $M$  keskiarvosovitukset.

Kuvassa 5.1 on ratkaistu yksittäiselle satelliitille Keplerin parametrit ajan suhteen. Näiden avulla on ratkaistu rataparametreissa tarvittuja arvoja polynomisovitteen sekä keskiarvon avulla. Kuvassa näkyy hyvin voimamallin (3.14) häiriökiikhtyvyyden vaikutus Keplerin parametreihin. Ideaalitapauksessa kiertorata olisi täydellinen ellipsi, jolloin parametrit olisivat keskianomaliaa  $M$  lukuun ottamatta vakioita. Kuvassa näkyy kuitenkin selvästi parametrien muutos ajan suhteen sekä jaksollinen värähtely.

Oskulloivat korjaustermit eli sinin ja kosinin kertoimet  $C_{ii}$  ovat sen sijaan ongelmallisempia, koska ne ovat todella herkkiä pienillekin muutoksille. Lisäksi oskulloinnin jakso on usein pidempi, kuin itse sovituksen pituus, joka myös tuo omat

ongelmansa. Tämän takia alkupaikassa kertoimien paikalla voidaan käyttää esimerkiksi tyypillisiä kertoimien arvoja, jotka on saatu tilastollisesti tutkimalla suurta määrää oikeita broadcast-efemeridejä. Myös aikaderivaattoja kuvaaville korjaustermeille voidaan tarvittaessa käyttää tyypillisiä arvoja.

### 5.2.2 Optimointiasetusten optimoiminen

Tarkastellaan aluksi optimointiasetuksiin liittyviä kysymyksiä. Kuinka pitkään ajanjaksoon kannattaa kerrallaan sovittaa rataparametrit? Toisin sanoen, kuinka pitkä jakso saadaan vielä kuvattua 16 rataparametrilla *riittävän* tarkasti. Lisäksi kiinnostava tieto on mittauspisteiden lukumäärä. Kuinka monta mittausta optimoinnissa tarvitaan vähintään, ja mikä olisi järkevä määrä mittauksia? Tärkeimmät kriteerit asetuksia valittaessa ovat laskenta-aika sekä sovituksen tarkkuus.

Tuntemattomia muuttujia optimoinnissa on yhteensä 16 kappaletta. Tällöin tarvitaan vähintään saman verran mittauksia, jotta optimointitehtävä ratkeaisi halutulla tarkkuudella. Jos yhdessä pisteessä satelliitin tilasta otetaan käyttöön pelkästään paikkakoordinaatit, saadaan jokaisesta tilasta kolme koordinaattia, eli mittausta. Tällöin kuudella eri ajanhetkellä saatu satelliitin tila antaa 18 mittausta. Vaikka 16 mittauspistettä periaatteessa riittäisi optimointitehtävän ratkaisuun, käytännössä parempiin tuloksiin päästään nopeammin ottamalla mittauksia enemmän.

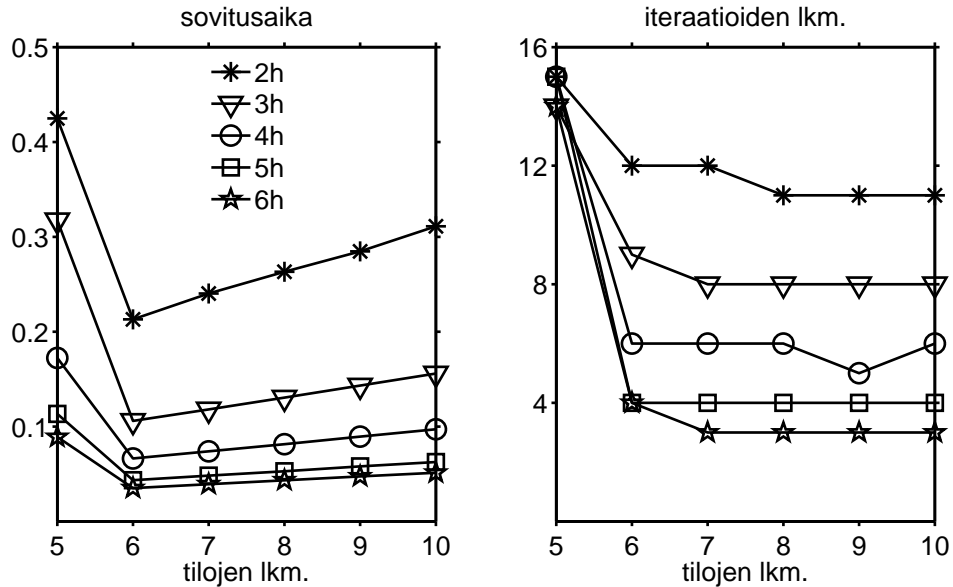
Mittauksia ei kuitenkaan kannata ottaa liikaa mukaan optimointiin. Yhden mittauksen mukaan ottaminen kasvattaa optimointivaiheessa laskettavan Jacobin matriisin kokoa yhdellä rivillä eli 16 alkiolla. Tällöin laskenta-aika kasvaa huomattavasti yhden iteraation aikana. Toisaalta optimoinnissa kokonaisaika ei kuitenkaan kasva samassa suhteessa, koska tarvittavien iteraatioiden määrä pienenee, kun dataa on saatavilla runsaasti.

Tarkastellaan tilannetta parametrisoimalla ennustettua GPS-satelliittien kiertorataa siten, että vaihdellaan edellä mainittuja tekijöitä. Dataa on kerätty GPS-viikoilta 1625-1635, jotka vastaavat päivämääriä 27.2.2011-14.5.2011. Kaikki tuolloin käytössä olleet GPS-satelliitit on otettu laskentaan mukaan, eli  $PRN = 2, 3, \dots, 32$ . Rataennusteet ovat aina neljän vuorokauden mittaisia ja jokainen ennustus alkaa aina GPS-viikon alusta. Näin ollen ennustusta ja parametrisointia on yhteensä noin 30000 tunnin ajalta. Tämä tarkoittaa, että kuuden tunnin mittaisia parametrisointeja on yhteensä noin 5000 kappaletta.

Yksittäisen ennustuksen kokonaispituus on siis neljä vuorokautta ja parametrisoinnin ajanjakson pituutta vaihdellaan kahdesta kuuteen tuntiin. Parametrisoinnissa käytettyjen datapisteiden lukumäärää muutetaan viidestä kymmeneen kapp-



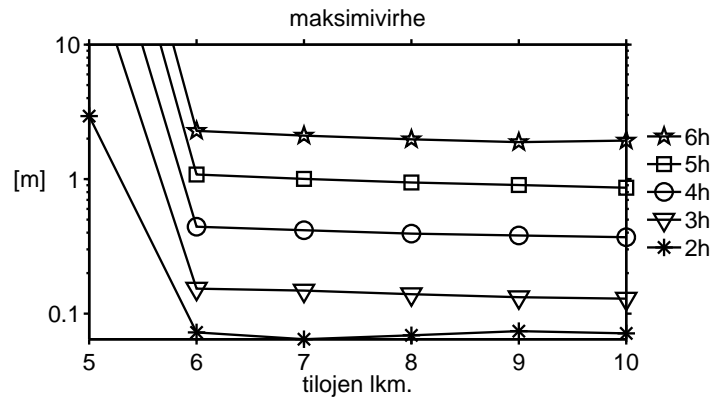
leeseen. Näytteitä on otettu ennustuksessa 2.5 minuutin välein. Tulokset on esitetty kuvissa 5.2 ja 5.3.



Kuva 5.2: Vasemmalla on yksittäisen ennustuksen parametrisoinnissa LM-menetelmän suppenemiseen kulunut suhteellinen aika, kun muutetaan sovituksen pituutta kahdesta kuuteen tuntiin ja tilojen lukumäärää viidestä kymmeneen kappaleeseen. Vastaavasti oikealla on yksittäisen ajanjakson parametrisoinnissa tarvittavien LM-menetelmän iteraatioiden lukumäärä. Sekä suppenemisajat, että iteraatioiden lukumäärät ovat keskiarvoja.

Kuvassa 5.2 iteraatioiden lukumäärä näyttäisi pysyttelevän vakiona, kunhan tiloja on riittävästi, eli kuusi tai enemmän, saatavilla. Optimointialgoritmissa on käytetty yhtenä lopetuskriteerinä iteraatioiden lukumäärälle maksimiarvoa 16. Kun optimoinnissa käytetään viittä tilaa, LM-menetelmä ei useimmiten suppene ollenkaan. Tämä näkyy iterratioiden suuren määrän lisäksi myös suurena sovitusvirheenä kuvassa 5.3. Epäonnistunut sovitus aiheutti kymmenien metrien suuruusluokkaa olevaa virhettä.

Sovitusajalla tarkoitetaan neljän päivän ennustuksen parametrisointiin eli optimointitehtävien ratkaisemiseen kuluvaa kokonaisaikaa. Sovitusajat ovat siis skaalattusiten, että on laskettu koko ennustuksen parametrisoimiseen kuluvaa aikaa. Tällöin saadaan selville eri sovitususten pituuksille keskenään vertailukelpoinen aika. Esimerkiksi yhden tunnin mittaisia sovituksia täytyy tehdä neljän tunnin pituisiin sovituksiin nähden 4-kertainen määrä. Tällöin ei ole järkevää vertailla yhteen sovitukseen kuluvia aikoja keskenään.



Kuva 5.3: Rataennustuksen parametrisoinnissa syntynyt virhe, kun muutetaan sovituksen pituutta kahdesta kuuteen tuntiin ja tilojen lukumäärää viidestä kymmeneen kappaleeseen. Virhe on saatu aina kaikkien sovitusten maksimivirheiden keskiarvona.

Kuvassa 5.2 sovitusaika näyttäisi kasvavan noin kaksinkertaiseksi, kun sovituksen pituutta lyhennetään yhdellä tunnilla. Tämä johtuu luultavasti siitä, että pitkässä ajanjaksossa satelliitti ehtii kulkea pitkän matkan kiertorataansa, jolloin täyttää kierrosta kuvaavan ellipsin sovittaminen nopeutuu. Tosin samalla tarkkuus huononee, kuten huomataan kuvassa 5.3.

Maksimivirheellä tarkoitetaan yhden sovituksen aikana syntyvää suurinta virhettä, kun rataparametrien avulla laskettua kiertorataa verrataan alkuperäiseen ennustettuun rataan. Virhettä laskettaessa on huomioitu kaikki tilat 2.5 minuutin välein, vaikka optimoinnissa ei käytettäisikään kaikkea saatavilla olevaa dataa. Tällaisella tarkastelulla huomiodaan, että parametrien täytyy generoida kiertorata riittävän tarkasti myös mittauspisteiden välissä koko sovitusajan pituudella.

Kahden tunnin mittainen sovitus antaa optimaaliset tulokset maksimivirheen ja sovitusajan perusteella. Tällöin 6 tilaa, eli  $3 \cdot 6 = 18$  mittauspistettä näyttäisi sopivan tarkoituksiin parhaiten. Tämä tarkoittaa, että näytteitä on kahden tunnin ajalta 24 minuutin välein, kun päätepisteet otetaan myös mukaan.

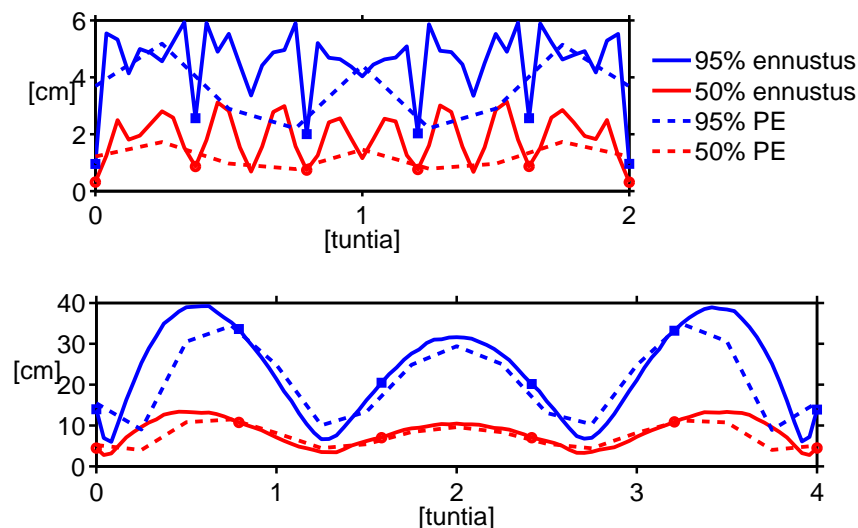
Toisaalta myös neljän tunnin pituisessa sovituksessa syntynyt virhe pysyy vielä kohtuullisella tasolla. Tällöin maksimivirhe on vielä alle puolen metrin, mikä on prosentoin luokkaa ennustuksessa syntyvään virheeseen. Neljän vuorokauden ennustuksessa GPS-satelliiteille mediaanivirhe on ennustuksen lopussa n. 60 metriä ja 95%-kvantiilin virhe noin 160 metriä. Vastaavasti GLONASS-satelliiteille noin 25 ja 70 metriä. [34, s. 18]

## 5.3 Mallin testaus

### Parametrisoinnin aiheuttama virhe

Tarkastellaan tarkemmin kahden ja neljän tunnin mittaisia sovituksia GPS- sekä GLONASS-satelliiteille. Käytetään edelleen dataa GPS-viikoilta 1625-1635 ja tuoloin kaikkia käytössä olleita satelliitteja. Ennustusten pituudet ovat edelleen aina neljä vuorokautta ja ennustusten alkuhetket aina GPS-viikon alussa. Näytteitä ennustuksesta otetaan 2.5 minuutin välein ja sovituksessa käytetään kuutta tilaa, eli 18 datapistettä.

Rataparametrien ratkaisemisen jälkeen verrataan parametreilla muodostettua rataa alkuperäiseen, eli ennustettuun rataan. Näin saadaan selville, kuinka paljon parametrisointi muuttaa ennustettua rataa. Vertailun vuoksi on rataparametrit sovitettu myös todelliseen kiertorataan. Parametrisoinnissa syntynyt virhe on esitetty GPS-satelliiteille kuvassa 5.4 ja GLONASS-satelliiteille kuvassa 5.5.

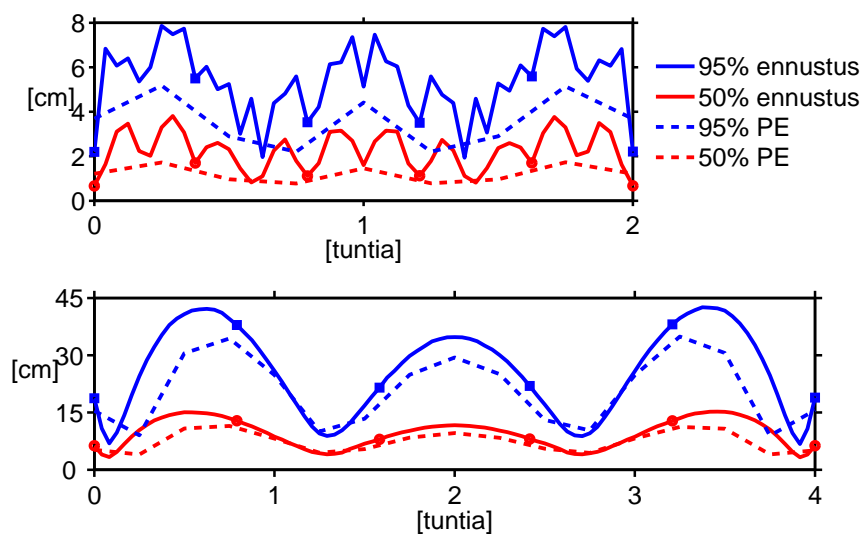


Kuva 5.4: GPS-satelliitin ennustetun radan parametrisoinnissa syntynyt virhe, kun sovitusvälin pituus on 2 tuntia ja 4 tuntia. Kuvissa on virheen 95% ja 50% kvantiilit. Kuviin on merkitty neliöillä ja ympyröillä ne tilat, joita käytettiin parametrisoinnissa. Katkoviivalla on piirretty vastaavat virheen kvantiilit, kun sovitus on tehty todelliseen (PE) kiertorataan.

Virhe on hyvin samansuuruista sekä GPS-satelliiteille kuvassa 5.4, että GLONASS-satelliiteille kuvassa 5.5. Näin ollen GPS-satelliiteille alun perin tarkoitetut rataparametrit sopivat yhtä hyvin myös GLONASS-satelliittien kiertorataan. Tämä onkin luonnollista, sillä eihän satelliitin kiertorataan vaikuttavat ominaisuudet kovin paljoa vaihtelee eri järjestelmien satelliiteille.

Kahden tunnin mittaisella sovituksella päästään alle 10 cm:n tarkkuuteen 95%:n kvantiililla. Ennustuksessa syntynyt virhe on neljän vuorokauden jälkeen kymmeniä metrejä molempien järjestelmien satelliiteille. Tämä tarkoittaa, että parametrisoinnissa syntynyt virhe on ennustusvirheeseen nähden on hyvin pieni. Lisäksi tyypillisen virheen, eli mediaanivirheen, suuruus on noin 2 cm mikä on ennustusvirheeseen suhteutettuna merkityksetön.

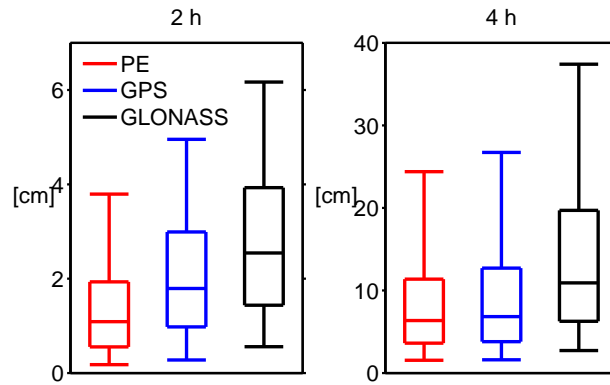
Neljän tunnin mittaisella sovituksella päästään 95%:n kvantiililla alle 50 cm:n tarkkuuteen ja tyypillinen virhe on noin 10 cm. Tämä tarkkuus riittänee käytännön sovelluksiin. Tällöin sekä sovitusaika että ennustuksen tallentamisessa tarvittavan datan määrä puolittuvat.



Kuva 5.5: GLONASS-satelliitin ennustetun radan parametrisoinnissa syntynyt virhe, kun sovitusvälin pituus on 2 tuntia ja 4 tuntia. Kuvissa on virheen 95% ja 50% kvantiilit. Kuviin on merkitty neliöillä ja ympyröillä ne tilat, joita käytettiin parametrisoinnissa. Katkoviivalla on piirretty vastaavat virheen kvantiilit, kun sovitus on tehty todelliseen (PE) kiertorataan.

Mallin sopivuutta satelliitin kiertoradan parametrisointiin testattiin tekemällä sovitus todelliseen (PE) kiertorataan. PE:ssä on paikkakoordinaatit annettu 15 minuutin välein, joten sovitusvirhekin on laskettu 15 minuutin välein, kun se ennustuksessa saatiin 2.5 minuutin välein. PE:stä saadun radan parametrisointi antaa hiukan pienempiä sovitusvirheitä verrattuna ennustettuun rataa. Ero ei kuitenkaan ole merkittävä, joten ennustuksen aiheuttama epätarkkuus ei kovin paljoa huononna sovitusta.

Kuvassa 5.6 on vielä tarkasteltu parametrisoinnissa syntyvää virhettä GPS- ja GLONASS-satelliiteille sekä verrattu tätä todelliseen kiertorataan (PE) tehtyyn sovitukseen. Kuvassa laatikon sisällä oleva viiva kuvaa mediaanivirhettä eli 50%



Kuva 5.6: Parametrisoinnissa syntynyt virhe oikealle (PE) kiertoradalle, sekä GPS- ja GLONASS-satelliiteille ennustetuille kiertoadoille. Vasemmalla on käytetty 2 tunnin ja oikealla 4 tunnin mittaista sovitusväliä.

kvantiilia ja laatikon ylä- ja alareunat kuvaavat 75% ja 25% kvantiileja. Laatikon ulkopuolella olevat ylä- ja alarajat kuvaavat virheen 95% ja 5% kvantiileja.

Parametrisoinnissa tehty sovitus muuttaa siis ennustettua rataa enemmän kuin todellista rataa. GPS-satelliittien ennusteille tehdyt sovitukset muuttavat rataa vähemmän kuin vastaavat GLONASS-satelliiteille. Tässä täytyy huomioda, että sovitus voi muuttaa ennustettua rataa myös parempaan suuntaan eli kohti todellista rataa. Tarkastellaan seuraavaksi parametrisoinnin vaikutusta ennustusvirheeseen.

## Parametrisoinnin vaikutus ennustusvirheeseen

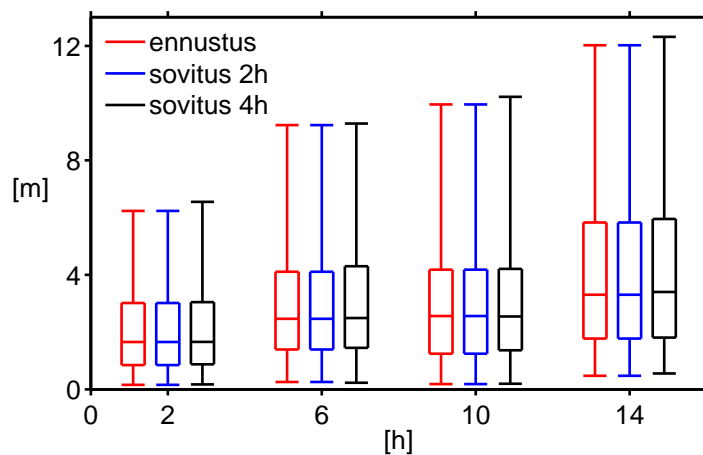
Tarkastellaan vielä virheen käyttäytymistä koko neljän vuorokauden ennustuksen aikana. Miten parametrisoinnissa syntynyt virhe muuttaa ennustusta, eli miten virhe jakautuu ennustetun kiertoaran ympärille. Jos sovitus on onnistuneesti tehty ja malli sen puolesta toimiva, tulisi virhejakautuman olla ainakin nollakeskeistä.

Aluksi parametrisoidaan jälleen ennustettu kiertoara. Tämän jälkeen laskeaan rataparametreilla muodostetun radan sekä oikean kiertoaran (PE) välisen erotuksen normi. Kun näin saatua virhettä verrataan ennustetun radan ja oikean radan väliseen virheeseen, saadaan selville, miten parametrisointi todellisuudessa muuttaa ennustusta.

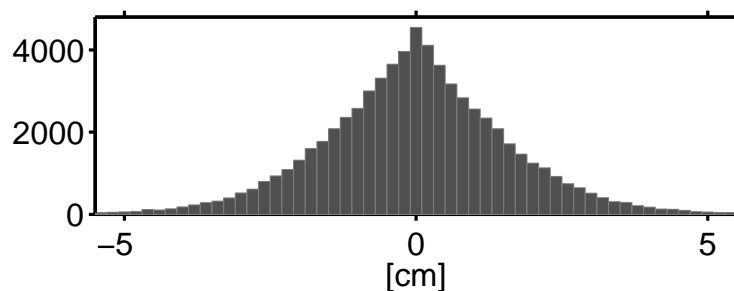
Tässä tarkastellaan koko ennustusta, eikä erikseen yksittäisiä sovituksia, täytyy mittaustuloksia lisätä hiukan. Nyt käytetään ennustuksia GPS-viikoilta 1625-1645 ja kaikki tuolloin käytössä olleet GPS-satelliitit on otettu laskentaan mukaan. Rataennusteet ovat edelleen neljän vuorokauden mittaisia ja jokainen ennustus alkaa aina GPS-viikon alusta. Ennustuksia on siis yhteensä noin 600 kappaletta.

Kuten edellä huomattiin, sovitusrvirheen vaikutus on muutaman vuorokauden kuluttua ennustusvirheeseen suhteutettuna pieni. Erityisen kiinnostavaa onkin tarkastella parametriseinnin vaikutusta nimenomaan ennustuksen alussa ensimmäisen vuorokauden aikana, jolloin ennustusvirhe ei ole vielä kasvanut kovin suureksi. Kuvassa 5.7 on esitetty ennustusvirhe, sekä parametriseinnin jälkeinen virhe kahden sekä neljän tunnin sovituväleillä ensimmäisen vuorokauden alkupuoliskolla.

Kuvassa 5.7 edelleen laatikot kuvaavat 75%, 50% sekä 25% ja ylärajat 95% ja alarajat 5% kvantiileja. Kahden tunnin pituisen sovituksen vaikutukset eivät oikeastaan edes näy ensimmäistenkään tuntien aikana. Neljän tunnin pituisen sovituksen vaikutus on jo nähtävissä, vaikkei sekään prosentuaalisesti kovin merkittävä ole.



Kuva 5.7: GPS-satelliiteille tehdyn ennustuksen alussa muodostunut ennustusvirhe, sekä parametriseinnin jälkeinen virhe kahden sekä neljän tunnin mittaisilla sovituksilla.



Kuva 5.8: GPS-satelliittien parametriseoidun radan sekä ennustetun radan virheiden välinen erotus, kun sovitusvälinä on 2 tuntia.

Tarkastellaan vielä miten sovitusrvirhe jakautuu ennustusvirheen ympärille. Vertailaan ennustusvirheen ja parametriseinnin jälkeisen virheen erotusta. Tällöin

nähdään, parantaako vai huonontaako parametrisoinnin aiheuttama epätarkkuus todellisuudessa ennustusta. Kuvassa 5.8 on piirretty histogrammiin ennustusvirheen sekä parametrisoinnin jälkeisen virheen erotus.

Virhe näyttäisi olevan selvästi nollakeskeistä ja jakauma muistuttaa hiukan enemmän kaksipuolista eksponenttijakaumaa kuin normaalijakaumaa. Yleisimmät tapaukset ovat selvästi aivan nollan ympäristössä, jolloin sovitus ei vaikuta ennustusvirheeseen ollenkaan. Nollakeskeisyys takaa sen, että sovitus parantaa yhtä usein kuin huonontaa ennustusta. Pidemmille sovituskänteille jakauma on samanmuotoinen, mutta skaalaus tietysti erisuuruinen. Toisin sanoen jakauma on edelleen nollakeskeistä, mutta hajonta kasvaa sovituskänten pituuden kasvaessa.

# Luku 6

## Yhteenveto

Tässä työssä tutkittiin GNSS-satelliitin ennustetun kiitoradan parametrisointia. Satelliitin kiitorata ennustettiin muodostamalla satelliitille fysikaalinen voimamalli, ja ratkaisemalla tämä numeerista integrointia käyttäen. Ennustettuun kiitorataan sovitettiin rataparametrit, joita GPS-järjestelmä käyttää satelliittien lähettämissä broadcast-efemerideissään. Parametrien sovittamisessa syntyneen epälineaarisen optimointitehtävän ratkaisussa käytettiin Levenbergin ja Marquardtin menetelmää. Motivaationa oli ennustetun kiitoradan esittäminen kompaktissa muodossa, jolloin ennustuksen käsittely ja tallennus helpottuu. Tällöin myös eri järjestelmien satelliittien ratatiedot saadaan yhtenevään muotoon.

Työssä tarkasteltiin satelliitin liikeyhtälön yhteyttä ellipsin muotoiseen kiitorataan sekä Keplerin parametreihin. Työssä käytetyt rataparametrit pohjautuvat näihin Keplerin parametreihin, mutta ne ottavat huomioon satelliittiin kohdistuvat häiriötekijät. Näiden 16 rataparametrin avulla voidaan kuvata muutaman tunnin pituinen pätkä satelliitin kiitorataa.

Rataparametrimuoto ei sovi täydellisesti ennustettuun kiitorataan, koska jo ennustus sisältää virhettä todelliseen rataan nähden. Toisaalta rataparametrimuoto ei sopinut täydellisesti edes todelliseen kiitorataan. Näin ollen rataparametrit oli estimoitava siten, että parametrisointi muutti mahdollisimman vähän ennustettua rataa. Rataparametrien sovittaminen ennustettuun kiitorataan muotoiltiin epälineaarisen optimointitehtävänä, ja se ratkaistiin numeerisesti. Työssä myös tarkasteltiin epälineaarista optimointia sekä erityisesti työssä käytettyä iteratiivista Levenbergin ja Marquardtin menetelmää.

Mallin testaaminen tehtiin Matlab-ohjelmistolla, ja työssä käytettiin ainoastaan oikeaa mittausdataa. Ennustamisessa käytettiin satelliittien lähettämiä broadcast-efemeridejä ja satelliitin todellinen kiitorata saatiin precise-efemerideistä (PE). Efemeridejä on tarjolla verkossa monien laitosten, kuten IGS:n ja NGA:n, ylläpi-



tämänä. Mallia testattiin GPS- sekä GLONASS-satelliittien ennustetuille radoille sekä precise-efemerideistä saaduille todellisille kiertoradoille. Työssä testattiin erityisesti kahden ja neljän tunnin pituisia sovituksia, mikä tarkoittaa noin 7000 ja 14000 km pituisia pätkiä ennustettua kiertorataa xyz-koordinaatteina. Työssä tutkittiin, kuinka hyvin 16 rataparametria pystyy kuvaamaan näitä koordinaatteja.

Havaittiin, että kahden tunnin mittainen sovitus aiheutti noin 2 cm:n suuruista mediaanivirhettä molempien järjestelmien satelliiteille ja neljän tunnin sovituksen aiheuttama mediaanivirheeksi saatiin noin 10 cm. Lisäksi lähes aina (95%) sovituksessa syntynyt virhe jäi kahden tunnin sovituksella alle 6 cm:n ja neljän tunnin sovituksella alle 40 cm:n. Ennustusvirheeseen suhteutettuna nämä virheet olivat neljän vuorokauden ennustuksessa kahta kertaluokkaa pienempiä. Sovituksen aiheuttamat vaikutukset ennustusvirheeseen olivat nähtävissä ainoastaan ennustuksen ensimmäisen vuorokauden aikana pidemmälle neljän tunnin sovitusvälille.

Edellä kuvatut sovitusvirheet ovat merkityksettä ennestään ennustusvirheeseen nähden. Siispa parametrisesitys on riittävän tarkka tämän työn käyttötarkoitukseen, missä valmiiksi jo epätarkka kiertorata haluttiin esittää kompaktissa muodossa. Kuitenkin tarkkaan kiertorataan (PE) tehty sovitus aiheutti vain hiukan vähemmän virhettä kuin ennustettuun rataan tehty sovitus. Pidemmällä 4 tunnin sovitusvälillä virhe tarkkaan rataan tehdyssä sovituksessa suurimmillaan (95%-kvantiili) noin 25 cm. Tämä on huomattavan paljon, kun verrataan GPS-järjestelmän broadcast efemeridin tarkkuuteen. Tämä antaa aihetta pohtia, paljonko broadcast efemeridin ja precise efemeridin välisestä virheestä aiheutuu ennustuksesta ja paljonko mallin epäsovivuudesta. Olisiko GPS-järjestelmässäkin syytä siirtyä käyttämään 2 tunnin soitusväliä nykyisen  $\pm 2$  h sijaan?

Työssä havaittiin myös, että parametrisoinnissa tehty sovitus aiheuttaa ennustusvirheeseen sekä positiivista että negatiivista vaikutusta. Ennustusvirheen vertaileminen parametrisoinnin jälkeiseen virheeseen osoitti, että soitusvirhe jakautui nollakeskeisesti ennustusvirheen ympärille. Toisin sanoen parametrisointi paransi ennustusta yhtä usein kuin huononsi tätä. Lisäksi jakaumasta havaittiin, että tyypillisimmässä tapauksessa parametrisointi ei oikeastaan vaikuttanut ennustusvirheeseen millään tavalla.

Työssä käytetyt rataparametrit ovat alunperin tarkoitettu vain GPS-järjestelmän satelliiteille. Myös muiden GNSS-järjestelmien satelliitit kiertävät suunnilleen samalla korkeudella Maan pinnasta, jolloin niiden kiertoradatkin ovat lähtökohdaisesti samankaltaisia. Rataparametrien sopivuutta testattiin työssä onnistuneesti myös GLONASS-järjestelmän satelliiteille. Tämä antaa aihetta olettaa, että mallin soveltaminen myös muihin GNSS-järjestelmiin onnistuu.

# Kirjallisuutta

- [1] Ali-Löytty, S., Collin, J., Leppäkoski, H., Sairo, H., ja Sirola, N. Paikannuksen matematiikka, 2008. Opintomoniste, [math.tut.fi/posgroup/paikannuksen\\_matematiikka\\_2010b.pdf](http://math.tut.fi/posgroup/paikannuksen_matematiikka_2010b.pdf).
- [2] Arfken, G. and Weber, H. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, San Diego (CA), 5th edition, 2001. 1112 p.
- [3] CDDIS: GPS Broadcast ephemeris files published by Crustal Dynamics Data Information System. [www; referred 23-January-2012] <ftp://igs.ensg.ign.fr/pub/igs/data/>.
- [4] Curtis, H. *Orbital Mechanics for Engineering Students*. Butterworth-Heinemann, Oxford (UK), 2nd edition, 2010. 744 p.
- [5] Dennis, J. and Schnabel, R. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. SIAM, Philadelphia, 1996. 378 p.
- [6] Elden, L., Wittmeyer-Koch, L., and Nielsen, H. *Introduction to Numerical Computation: analysis and MATLAB illustrations*. Studentlitteratur, Sweden, 1st edition, 2004. 375 p.
- [7] Ferdinand, V. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, United States, 2nd edition, 2000. 311 p.
- [8] Global navigation satellite system GLONASS: Interface Control Document (GLONASS ICD), version 5.1, (2008), Russian Institute of Space Device Engineering/Research., [http://facility.unavco.org/data/docs/ICD\\_GLONASS\\_5.1\\_\(2008\)\\_en.pdf](http://facility.unavco.org/data/docs/ICD_GLONASS_5.1_(2008)_en.pdf).
- [9] GPS-World, Gakstatter, E., Perspectives - October 2007, <http://gpsworld/survey.com/survey/pespectives-october-2007-7280>.
- [10] Haataja, J. *Optimointitehtävien ratkaiseminen*. Picaset Oy, Helsinki, 3. painos, 2004. 245 s.
- [11] IGS: GLONASS Broadcast ephemeris files published by International GNSS Service. [www; referred 23-January-2012] <ftp://igs.ensg.ign.fr/pub/igs/data/>.

- [12] IGS: GPS Precise ephemeris files published by International GNSS Service. [www; referred 23-January-2012] <ftp://igsb.jpl.nasa.gov/pub/product/>.
- [13] IGS: GLONASS Precise ephemeris files published by International GNSS Service. [www; referred 23-January-2012] <ftp://cddis.gsfc.nasa.gov/pub/gps/data/hourly>.
- [14] Kaleva, O. Matemaattinen optimointi 1. Tampereen Teknillinen Yliopisto, 1999. Opetusmoniste.
- [15] Kaplan, E. and Christopher, H. *Understanding GPS: principles and applications*. Artech House, Norwood (MA), 2nd edition, 2006. 554 p.
- [16] Karttunen, H., Donner, K., Kröger, P., Oja, H., ja Poutanen, M. *Tähtitieteen perusteet*. Ursa, Helsinki, 5. painos, 2010. 680 s.
- [17] Kouba, J. *A Guide to Using International GNSS Service (IGS) Products (2009)*, Geodetic Survey Division Natural Resources Canada, <http://igsb.jpl.nasa.gov/igsb/resource/pubs/UsingIGSProductsVer21.pdf>.
- [18] Larson, R., Hostetler, R., and Edwards, B. *Calculus with analytic geometry*. Houghton Mifflin Company, USA, 8th edition, 2006. 1138 p.
- [19] Lay, D. *Linear algebra and its applications*. Addison Wesley Longman, Inc, United States, 3rd edition, 2003. 492 p.
- [20] Madsen, K., Nielsen, H., and Tingleff, O. Methods for non-linear least squares problems. Technical University of Denmark, 2004. tutorial, [http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/views/publication\\_details.php?id=3215](http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/views/publication_details.php?id=3215).
- [21] Mansfield, M. and O’Sullivan, C. *Understanding Physics*. John Wiley & Sons, Chichester, 2nd edition, 2011. 680 p.
- [22] Marquardt, D. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 11(2):431–441, 1963.
- [23] Misra, P. and Enge, P. *Global Positioning System: Signals, Measurements, and Performance*. Ganga-Jamuna Press, Lincoln (MA), 2nd edition, 2006. 569 p.
- [24] Monahan, J. *Numerical Methods of Statistics*. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 1st edition, 2001. 428 p.
- [25] Montenbruck, O. and Gill, E. *Satellite Orbits*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 3rd edition, 2005. 369 p.
- [26] Morris, H., Stephen, S., and Robert, D. *Differential Equations, Dynamical Systems and An Introduction to Chaos*. Elsevier Academic Press, United States, 2nd edition, 2004. 417 p.

- [27] Nocedal, J. and Wright, S. *Numerical Optimization*. Springer, USA, 1st edition, 1999. 645 p.
- [28] Petit, G. and Luzum, B. Iers conventions (2010). IERS Technical Note 36, Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main, 2010. 179 p.
- [29] Poole, D. *Linear algebra, A Modern Introduction*. Brooks/Cole, United States, 1st edition, 2003. 763 p.
- [30] Poutanen, M. Satelliittipaikannus-kirjan käsikirjoitusta, luvut 1-3 (osit-tain), 2007. [www; haettu 9-elokuu-2011], <http://www.fgi.fi/~mp/tiedostot/gpskirja.pdf>.
- [31] Ranganathan, A. The Levenberg-Marquardt Algorithm, 2004. [www; referred 3-February-2012], <http://ananth.in/docs/lmtut.pdf>.
- [32] Seidelmann, P. K. *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*. University Science Books, USA, 2nd edition, 2006. 753 p.
- [33] Seppänen, M. *GPS-satelliitin radan ennustaminen*. Tampereen teknillinen yliopisto, Tampere, 2010. Diplomityö.
- [34] Seppänen, M., Ala-Luhtala, J., Piché, R., Martikainen, S., and Ali-Löytty, S. Autonomous prediction of GPS and GLONASS satellite orbits. *NAVIGATION*, 2012. (accepted).
- [35] Seppänen, M., Perälä, T., and Piché, R. *Autonomous Satellite Orbit Prediction*. International Technical Meeting, San Diego, California, 2011.
- [36] Stewart, J. *Calculus, Concepts And Contexts*. Brooks/Cole, United States, 2nd edition, 2001. 988 p.
- [37] Wells, D. and Beck, N. *Guide to GPS positioning*. Canadian GPS Associates, Canada, 1st edition, 1999. 601 p.
- [38] Wolfram MathWorld, ellipse [www; referred 9-February-2012] <http://mathworld.wolfram.com/Ellipse.html>.
- [39] Young, H. and Freedman, R. *University Physics*. Addison-Wesley Publishing Company, USA, 10th edition, 2000. 1513 p.

# Liite A

## Ellipsin yhtälö

Newtonin lakien seurauksena satelliittien kiertoradat ovat elliptisiä. Ellipsi on tasokuvio myös avaruudessa, joten yleisyyttä loukkaamatta voidaan siis rajoittua xy-tasolle. Tämän jälkeen ellipsi voidaan koordinaatistomuunnoksilla suunnata avaruudessa haluttuun asentoon kolmen kulman avulla. [38]

**Määritelmä A.1.** *Ellipsi on tason niiden pisteiden joukko, joiden etäisyys kahdesta kiinteästä pisteestä on vakio. [18, s. 697]*

Ellipsin määritelmän kahta kiinteää pistettä sanotaan ellipsin polttopisteiksi. Merkitään polttopisteiden etäisyyksiä pisteestä  $(x, y)$  kirjaimilla  $r_1$  ja  $r_2$ . Tällöin voidaan ellipsin määritelmän toteuttava yhtälö kirjoittaa muodossa

$$r_1 + r_2 = \text{vakio} =: 2a,$$

missä vakio  $2a$  on määritelmässä annettu etäisyys.

Ellipsi voidaan sitoa suorakulmaiseen koordinaatistoon xy-tasolle siten, että polttopisteet sijaitsevat x-akselilla pisteissä  $(-c, 0)$  ja  $(c, 0)$ . Tällöin ellipsin yhtälöksi saadaan

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Siirretään vasemmanpuoleinen neliöjuurilauseke oikealle puolelle ja korotetaan yhtälö puolittain toiseen potenssiin. Tällöin saadaan

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2.$$

Ratkaistaan tästä neliöjuurilauseke

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \frac{1}{4a}(4a^2 - 4cx) = a - \frac{cx}{a},$$

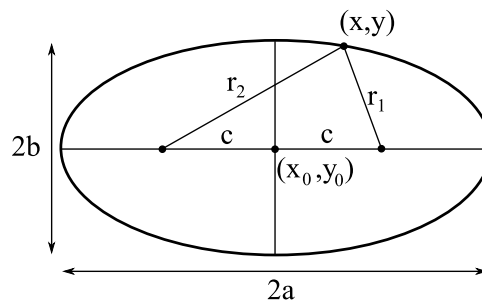
ja korotetaan puolittain toiseen potenssiin, jolloin saadaan

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2 x^2}{a^2}.$$

Järjestelemällä termejä sopivasti saadaan yhtälö muotoon

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Ellipsi leikkaa siis x-akselin pisteissä  $(\pm a, 0)$  ja vastaavasti y-akselin pisteissä  $(0, \pm\sqrt{a^2 - c^2})$ . Merkitään jälkimmäisessä olevaa termiä  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ . Vakioita  $a$  ja  $b$  sanotaan ellipsin puoliakseleiksi.



Kuva A.1: Ellipsin parametrit

Alussa tehdyn oletuksen mukaisesti polttopisteet sijaitsivat x-akselilla siten, että ellipsin keskipiste sijaitsee origossa. Tarvittaessa tästä oletuksesta voidaan luopua, jolloin ellipsin keskipiste voidaan asettaa pisteeseen  $(x_0, y_0)$ . Tällöin ellipsin yhtälö saadaan esitettyä kirjallisuudessa useimmiten nähdyssä muodossa

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (\text{A.1})$$

Asetetaan toinen ellipsin polttopisteistä origoon, jolloin ellipsin keskipisteeksi saadaan  $(-c, 0)$ . Muutetaan seuraavaksi ellipsin yhtälö napakoordinaattimuotoon. Tällöin jokainen xy-tason piste  $(x, y)$  voidaan kirjoittaa origosta mitatun etäisyyden  $r$  ja x-akselista mitatun kulman  $\nu$  avulla

$$\begin{cases} x = r \cos(\nu) \\ y = r \sin(\nu) \end{cases}$$

Sijoitetaan tämä ellipsin yhtälöön (A.1), jolloin saadaan

$$\begin{aligned} & \frac{(r \cos(\nu) + c)^2}{a^2} + \frac{(r \sin(\nu))^2}{b^2} = 1 \\ \Leftrightarrow & b^2 c^2 + 2b^2 c r \cos(\nu) + r^2 \cos^2(\nu) + a^2 r^2 \sin^2(\nu) - a^2 b^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & b^2 c^2 + 2b^2 c r \cos(\nu) + r^2 \cos^2(\nu) + a^2 r^2 - a^2 r^2 \cos^2(\nu) - a^2 b^2 = 0 \end{aligned}$$

Tässä käytettiin trigonometriaa  $\sin^2(\nu) = 1 - \cos^2(\nu)$  hyödyksi. Merkitään vakioiden  $c$  ja  $a$  suhdetta, eksentrisyyttä, vakiolla  $e = c/a$ . Koska  $c$  ja  $a$  ovat positiivisia ja  $a < c$ , niin eksentrisyys on rajoitettu välille  $0 < e < 1$ . Tällöin toinen puoliakseli voidaan kirjoittaa muodossa  $b = a\sqrt{1 - e^2}$ . Sijoittamalla nämä edelliseen yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} & a^2(1 - e^2)a^2 e^2 + 2a^2(1 - e^2)aer \cos(\nu) + a^2(1 - e^2)r^2 \cos^2(\nu) \\ & + a^2 r^2 - a^2 r^2 \cos^2(\nu) - a^2 a^2(1 - e^2) = 0 \\ \Leftrightarrow & (1 - e^2)a^2 e^2 + 2(1 - e^2)aer \cos(\nu) - e^2 r^2 \cos^2(\nu) + r^2 - a^2(1 - e^2) = 0 \\ \Leftrightarrow & \left((1 - e^2)a\right)^2 - 2 \cdot er \cos(\nu) \cdot (1 - e^2)a + (er \cos(\nu))^2 = r^2 \\ \Leftrightarrow & \left(er \cos(\nu) - (1 - e^2)a\right)^2 = r^2 \\ \Leftrightarrow & r = \pm \left((1 - e^2)a - er \cos(\nu)\right). \end{aligned}$$

Koska etäisyys  $r$  on ei-negatiivinen, valitaan

$$r = (1 - e^2)a - er \cos(\nu)$$

Näin saadaan ellipsin yhtälö napakoordinaattimuodossa

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\nu)}. \quad (\text{A.2})$$

## Liite B

# Liikefunktion Lipschitz-jatkuvuuden todistus

Luvussa 3 liikeyhtälön ratkaisun olemassaolon ja yksikäsitteisyyden tutkimisessa tarvittiin tietoa liikefunktion Lipschitz-jatkuvuudesta. Määritellään Lipschitz-jatkuvuus seuraavaksi:

**Määritelmä B.1.** *Funktio  $\vec{\mathbf{h}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  on Lipschitz-jatkuva joukossa  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , mikäli on olemassa vakio  $\lambda_L \in \mathbb{R}^+$  siten, että*

$$\|\vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{y}}_1(t)) - \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{y}}_2(t))\| \leq \lambda_L \|\vec{\mathbf{y}}_1(t) - \vec{\mathbf{y}}_2(t)\|, \quad \forall \vec{\mathbf{y}}_1(t), \vec{\mathbf{y}}_2(t) \in D,$$

missä Lipschitz-vakio  $\lambda_L$  ei riipu vektoreiden  $\vec{\mathbf{y}}_1(t)$  ja  $\vec{\mathbf{y}}_2(t)$  valinnasta. [7, s. 3]

Tarkastellaan luvussa 3 esitettyä liikefunktia (3.2), joka määrittää gravitaatio-laista johdetun ensimmäisen asteen epälineaarisen differentiaaliyhtälöryhmän. Liikefunktio voidaan kirjoittaa matriisimuodossa

$$\vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{y}}(t)) = \mathbf{A}\vec{\mathbf{y}}(t) = \dot{\vec{\mathbf{y}}}(t), \quad (\text{B.1})$$

missä käytetään merkintöjä

$$\vec{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{r}} \\ \dot{\vec{\mathbf{r}}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\frac{\mu}{\|\vec{\mathbf{r}}\|^3} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}. \quad (\text{B.2})$$

Näytetään nyt, että liikefunktio on tietyin rajoituksin Lipschitz-jatkuva.

Tarkastelemalla matriisia  $\mathbf{A}$  (B.2) huomataan, että funktiolla  $\vec{\mathbf{h}}$  on epäjatkuvuuskohta, kun paikkavektori on nollavektori. Annetaan nyt paikkavektorin lähestyä nollavektoria, jolloin  $\|\vec{\mathbf{r}}\| \rightarrow 0$  ja  $\frac{\mu}{\|\vec{\mathbf{r}}\|^3} \rightarrow \infty$ . Tällöin  $\|\vec{\mathbf{y}}\| \rightarrow \|\dot{\vec{\mathbf{r}}}\|$ , mutta  $\|\vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{y}})\| \rightarrow \infty$ .



Tällä tarkastelulla havaitaan, että funktio  $\vec{\mathbf{h}}$  ei ole Lipschitz-jatkuva ainakaan vektorin  $\vec{\mathbf{y}} = (\vec{\mathbf{0}}^T, \dot{\vec{\mathbf{r}}}^T)^T$  ympäristössä.

Tarkastellaan nyt tilannetta tämän epäjatkuvuuskohdan ulkopuolella. Oletetaan, että

$$\|\vec{\mathbf{r}}\| \geq \sqrt[3]{\frac{4\mu}{\lambda_L}} \approx \frac{1200\text{m}}{\sqrt[3]{\lambda_L}}, \quad \lambda_L \geq 1 \quad (\text{B.3})$$

Tämä oletus voidaan tässä työssä tehdä, kun muistetaan, että GNSS-satelliitit kiertävät Maata yli 25000 km korkeudella. [30, s. 121] Lisäksi kasvattamalla vakion  $\lambda_L$  arvoa päästään mielivaltaisen lähelle epäjatkuvuuskohtaa  $\vec{\mathbf{y}} = (\vec{\mathbf{0}}^T, \dot{\vec{\mathbf{r}}}^T)^T$ . Kiinnitetään nyt tämä vakio. Tällöin saadaan

$$D = \left\{ \vec{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^6 \mid \|(y_1, y_2, y_3)^T\| = \|\vec{\mathbf{r}}\| \geq \sqrt[3]{\frac{4\mu}{\lambda_L}} \right\}.$$

Olkoon nyt  $\vec{\mathbf{y}}_i = (\vec{\mathbf{r}}_i^T, \dot{\vec{\mathbf{r}}}_i^T)^T \in D, i = 1, 2$ . Yleisyyttä loukkaamatta voidaan valita indeksointi siten, että  $\|\vec{\mathbf{r}}_2\| \leq \|\vec{\mathbf{r}}_1\|$ . Johdetaan aluksi kaksi aputulosta, joiden avulla saadaan sitten osoitettua Lipschitz-jatkuvuus.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\|\vec{\mathbf{r}}_1\|^3} - \frac{1}{\|\vec{\mathbf{r}}_2\|^3} \right| \|\vec{\mathbf{r}}_1\| &= \left| \frac{\|\vec{\mathbf{r}}_2\|^3 - \|\vec{\mathbf{r}}_1\|^3}{\|\vec{\mathbf{r}}_1\|^3 \|\vec{\mathbf{r}}_2\|^3} \right| \|\vec{\mathbf{r}}_1\| = \frac{|\|\vec{\mathbf{r}}_2\|^3 - \|\vec{\mathbf{r}}_1\|^3|}{\|\vec{\mathbf{r}}_1\|^2 \|\vec{\mathbf{r}}_2\|^3} \\ &= \frac{(\|\vec{\mathbf{r}}_2\|^2 + \|\vec{\mathbf{r}}_2\| \|\vec{\mathbf{r}}_1\| + \|\vec{\mathbf{r}}_1\|^2) |\|\vec{\mathbf{r}}_2\| - \|\vec{\mathbf{r}}_1\||}{\|\vec{\mathbf{r}}_1\|^2 \|\vec{\mathbf{r}}_2\|^3} \\ &= \left( \frac{1}{\|\vec{\mathbf{r}}_1\|^2 \|\vec{\mathbf{r}}_2\|} + \frac{1}{\|\vec{\mathbf{r}}_1\| \|\vec{\mathbf{r}}_2\|^2} + \frac{1}{\|\vec{\mathbf{r}}_2\|^3} \right) |\|\vec{\mathbf{r}}_2\| - \|\vec{\mathbf{r}}_1\|| \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \frac{3}{\|\vec{\mathbf{r}}_2\|^3} |\|\vec{\mathbf{r}}_2\| - \|\vec{\mathbf{r}}_1\|| \stackrel{(**)}{\leq} \frac{3}{\|\vec{\mathbf{r}}_2\|^3} \|\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1\|, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

missä käytettiin kohdassa (\*) tietoa  $\|\vec{\mathbf{r}}_2\| \leq \|\vec{\mathbf{r}}_1\|$  ja kohdassa (\*\*) kolmioepäyhtälöä alaspäin. Näin saatua aputulosta (B.4) käyttämällä saadaan toinen aputulos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\|\vec{\mathbf{r}}_1\|^3} \vec{\mathbf{r}}_1 - \frac{1}{\|\vec{\mathbf{r}}_2\|^3} \vec{\mathbf{r}}_2 \right\| &= \left\| \frac{1}{\|\vec{\mathbf{r}}_1\|^3} \vec{\mathbf{r}}_1 - \frac{1}{\|\vec{\mathbf{r}}_2\|^3} \vec{\mathbf{r}}_1 + \frac{1}{\|\vec{\mathbf{r}}_2\|^3} \vec{\mathbf{r}}_1 - \frac{1}{\|\vec{\mathbf{r}}_2\|^3} \vec{\mathbf{r}}_2 \right\| \\ &\leq \left\| \frac{1}{\|\vec{\mathbf{r}}_1\|^3} \vec{\mathbf{r}}_1 - \frac{1}{\|\vec{\mathbf{r}}_2\|^3} \vec{\mathbf{r}}_1 \right\| + \left\| \frac{1}{\|\vec{\mathbf{r}}_2\|^3} \vec{\mathbf{r}}_1 - \frac{1}{\|\vec{\mathbf{r}}_2\|^3} \vec{\mathbf{r}}_2 \right\| \\ &= \left\| \left( \frac{1}{\|\vec{\mathbf{r}}_1\|^3} - \frac{1}{\|\vec{\mathbf{r}}_2\|^3} \right) \vec{\mathbf{r}}_1 \right\| + \left\| \frac{1}{\|\vec{\mathbf{r}}_2\|^3} (\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2) \right\| \\ &\leq \left| \frac{1}{\|\vec{\mathbf{r}}_1\|^3} - \frac{1}{\|\vec{\mathbf{r}}_2\|^3} \right| \|\vec{\mathbf{r}}_1\| + \frac{1}{\|\vec{\mathbf{r}}_2\|^3} \|\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2\| \\ &\stackrel{(\text{B.4})}{\leq} \frac{3}{\|\vec{\mathbf{r}}_2\|^3} \|\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2\| + \frac{1}{\|\vec{\mathbf{r}}_2\|^3} \|\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2\| = \frac{4}{\|\vec{\mathbf{r}}_2\|^3} \|\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2\|. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Edelleen käyttämällä tätä aputulosta (B.5) sekä oletusta (B.3) saadaan

$$\left\| \frac{\mu}{\|\vec{\mathbf{r}}_1\|^3} \vec{\mathbf{r}}_1 - \frac{\mu}{\|\vec{\mathbf{r}}_2\|^3} \vec{\mathbf{r}}_2 \right\| \stackrel{(B.5)}{\leq} \frac{4\mu}{\|\vec{\mathbf{r}}_2\|^3} \|\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2\| \stackrel{(B.3)}{\leq} \lambda_L \|\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2\|. \quad (\text{B.6})$$

Näin saadaan

$$\begin{aligned} \|\vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{y}}_1) - \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{y}}_2)\|^2 &= \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\frac{\mu}{\|\vec{\mathbf{r}}_1\|^3} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{r}}_1 \\ \dot{\vec{\mathbf{r}}}_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\frac{\mu}{\|\vec{\mathbf{r}}_2\|^3} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{r}}_2 \\ \dot{\vec{\mathbf{r}}}_2 \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= \left\| \begin{pmatrix} \dot{\vec{\mathbf{r}}}_1 - \dot{\vec{\mathbf{r}}}_2 \\ \frac{-\mu}{\|\vec{\mathbf{r}}_1\|^3} \vec{\mathbf{r}}_1 - \frac{-\mu}{\|\vec{\mathbf{r}}_2\|^3} \vec{\mathbf{r}}_2 \end{pmatrix} \right\|^2 = \|\dot{\vec{\mathbf{r}}}_1 - \dot{\vec{\mathbf{r}}}_2\|^2 + \left\| \frac{-\mu}{\|\vec{\mathbf{r}}_1\|^3} \vec{\mathbf{r}}_1 - \frac{-\mu}{\|\vec{\mathbf{r}}_2\|^3} \vec{\mathbf{r}}_2 \right\|^2 \\ &\stackrel{(B.6)}{\leq} \|\dot{\vec{\mathbf{r}}}_1 - \dot{\vec{\mathbf{r}}}_2\|^2 + \lambda_L^2 \|\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2\|^2 \leq \lambda_L^2 \|\dot{\vec{\mathbf{r}}}_1 - \dot{\vec{\mathbf{r}}}_2\|^2 + \lambda_L^2 \|\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2\|^2 \\ &= \lambda_L^2 \left\| \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2 \\ \dot{\vec{\mathbf{r}}}_1 - \dot{\vec{\mathbf{r}}}_2 \end{pmatrix} \right\|^2 = \lambda_L^2 \|\vec{\mathbf{y}}_1 - \vec{\mathbf{y}}_2\|^2. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Epäyhtälöstä (B.7) voidaan ottaa puolittain neliöjuuret, jolloin saadaan

$$\|\vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{y}}_1) - \vec{\mathbf{h}}(\vec{\mathbf{y}}_2)\| \leq \lambda_L \|\vec{\mathbf{y}}_1 - \vec{\mathbf{y}}_2\|.$$

Näin ollen funktio  $\vec{\mathbf{h}}$  on Lipschitz-jatkuva joukossa  $D$ .